シュプリンガー数学クラシックス　第26巻

R.クーラント／D.ヒルベルト［著］
藤田 宏／高見 穎郎／石村 直之［訳］

数理物理学の方法 上

丸善出版

Translation from the German language edition:
Methoden der mathematischen Physik by Richard Courant and David Hilbert

訳者前書き

本書は，R. クーラント (Richard Courant: 1888–1972) と D. ヒルベルト (David Hilbert: 1862–1943) による名著であり，世界中で「クーラント–ヒルベルト本」の愛称のもとに広く読まれた『数理物理学の方法』の最新版，すなわち，その第 4 版（1993 年，ドイツ語）の和訳である．

もともと「2 巻もの」として構想された「クーラント–ヒルベルト本」の第 I 巻は初版が 1924 年に，その改訂版が 1930 年に出版された．第 II 巻の初版が刊行されたのは，ナチス政権によるユダヤ人迫害を免れるためにクーラントがゲッティンゲンを去ってニューヨークに移って以後の，1937 年であった．

ドイツ語で書かれたこれら原著は，対象とする問題の本質を深くとらえることにより，普遍的で強力な，それでいて明快な数学的方法を教示してくれる，やや程度の高い「物理数学」の専門書として，今で言う数理科学に関わる学者，専門家さらに学生の必読の書となった．

日本も例外ではなく，私事めくが，訳者のうちの藤田・高見の両名が在学したころの旧制東大の物理学科の各学年では学生達が数組の輪講会を開き，ドイツ語のハードルに苦闘しながら“クーラン・ヒルベルト”を読み続けたのであった．ちなみに，当時の学生達は，クーラントの名前をフランス読みしてクーランと発音していた．全体を通読できた個人やグループは稀有であった．また，読みはしたが理解できない難所が多々あったが，それでも，読んだだけの功徳は十分にあるというのが当時の学生達の印象であった．

P. ラックス (Peter Lax) が序文で引用している C. リードによるクーラントの伝記によれば,「クーラント–ヒルベルト本」の出版に関する発端は，恩師ヒ

ルベルトの積分方程式や変分法についての講義に感動した，当時 30 歳そこそこのクーラントが，それに基づく著作をヒルベルトにもちかけて承諾を得たことである．その一方で，クーラントは，第一次世界大戦に共に従軍して負傷した縁により知遇を得ていたフェルディナンド・シュプリンガー博士（シュプリンガー社主の一人）に数理科学のモノグラフ・シリーズ（後年，黄表紙シリーズとして一世を風靡した Grundlehren der mathematishen Wissenschaften in Einzeldarstellungen）の刊行を提案し，自ら主任編集者になるとの申し出とともに同意を得ていた．クーラントの意中ではそのシリーズの先陣を切って「クーラント–ヒルベルト本」を刊行したい思いがあった由である．

なお，実際の執筆がなされる頃になると，ヒルベルトの興味は数理論理学に移っていたため，原稿執筆の労は専らクーラントの担うところとなったことは各版の序文に記されている．しかしながら，クーラントは初版に付された序文の末尾において「本書に代表されている科学的ならびに教育的な努力は，永久にヒルベルトの名前と共に伝えられるべき数学的精神の『子供たち』なのである.」と強調している．

クーラントがいわんとしたヒルベルト流の数学的精神を敷衍したものとして，クーラントが 1962 年にヒルベルトの生誕 100 年を祝う行事で行なった講演の一節を紹介しておこう．(C. リード著，弥永健一訳『ヒルベルト――現代数学の巨峰――』岩波書店，1972 年)：「生きた数学は直観と論理,『地についた』諸問題と遥か高所に立った抽象による一般性といった相矛盾する力の拮抗の上に立っているのであります．――中略――数学は科学の大河に流れをくむ統一的で生命力にみちた流れとして愛せられ，さらに力強きものに育てられねばなりません．それが（孤立と細分化により）砂の中に姿を没するようなことがあってはなりません.」

「ヒルベルトは彼自身の例によってそうした危険が容易に避けられるものであること，そして純粋・応用数学の間にギャップは存在しないこと，そして，数学と科学全体の間に実り豊かな合体が実現され得ることを示しました．それゆえにこそ，ヒルベルトの楽観主義が多くの人々をひきつけるのであり，それが今日の数学にとってなお生き生きとした意義をもっているのです．――後略.」

第二次世界大戦中およびその後の変則的な状況は，シュプリンガー社による「クーラント–ヒルベルト本」の出版に影響を及ぼしたが，その間に，英語版が Interscience Publisher から第 1 巻は 1953 年，第 2 巻は 1962 年と刊行された．第 2 巻は当時進展した偏微分方程式の結果を取り入れようとしたこともあって些か大部なものになりすぎたとの思いがクーラント自身にもあったらしく，彼は 1968 年における，シュプリンガー社による原型のままの出版を歓迎した（前掲の第 3 版序文参照）．さらに，1993 年に刊行された第 4 版は，ドイツ語の原著 I, II 巻から，もっとも「それらしい」部分を一冊にまとめたものである．

「クーラント–ヒルベルト本」が今も輝かしさを失わない古典である所以や内容の特色は，第 4 版に付されたラックスによる序文において的確かつ洒脱に紹介されている．その紹介を日本の読者に向けて補足する形で辿ってみよう．なお，ラックスは双曲型偏微分方程式論やその数値解法で著名な解析学者であるが，クーラントがニューヨークに移住してから育てた愛弟子である．

ラックスの序文によれば，原著第 4 版の章立は「解析的な立場で線形代数を述べる」第 1 章に始まり，関数空間における直交関数系による展開，積分方程式の各章を経て「クーラント–ヒルベルト本」のハイライトともいえる変分法の基礎が第 4 章で解説されている．当訳本ではここまでを上巻に収めている．それに続き，訳本の下巻に含まれるのは

第 5 章　数理物理学における振動問題と固有値問題
第 6 章　固有値問題への変分法の応用
第 7 章　固有値問題によって定義される特殊関数
第 8 章　変分法に基づく境界値問題と固有値問題の解法

である．

第 5 章から第 7 章までの内容は，ラックスが指摘しているように，偏微分方程式の固有値問題について，理論と応用の双方に目配りの効いた解説として素晴らしい．第 8 章だけは，「クーラント–ヒルベルト本」の第 II 巻から取り入れられたものである．K.O. フリードリックスが執筆したというこの章では変分法の手法によって楕円型境界値問題の解の存在等が扱われている．現

代式の偏微分方程式論で利器として多用されている「高階の一般化導関数を系統付けるソボレフ空間論」や「超関数の理論」を前提としないための煩雑さもあるが，それだけに構成的な工夫がなされていて味わいが深い．

初版以来の世紀に近い年月を経ても「クーラント–ヒルベルト本」が扱うテーマへの優れた入門書でもある理由を，ラックスは，クーラントの大局観と論述の卓抜さにありとしている．ラックスは,「読者は，テーマの核心をなす理念に向かってソフトにしかもスピーディに導かれると同時に，技巧的な詳細にわずらわされることなしに，これらの理論の応用を学ぶことができる.」といっているが，翻して言えば，読者は技術的な困難にめげずに核心をつかむつもりで読みすすめばよいということになる．

また，論述のスタイルについて，クーラントは,「結果を体系的にかつ最も集約的に述べる定型」，すなわち,「定義–定理–証明」のスタイルとは対極をなす,「語り」のそれを採用している．創造的な講義や刺激的なゼミでの討論と同じく，背景の理解，発想への同感，結果から問題へのフィードバックなど読者の主体性を誘発するプロセスを重視したゆえであろう．ただし，本訳書においては，読者のとまどいを減らすのに役立つと思われる限度において「定理」を浮き立たせる表示を補っている．

ヒルベルトの指導のもとに，古典的なディリクレ問題を典型とする楕円型偏微分方程式の変分問題の研究により博士の学位および教授資格を得たクーラントは，そのスタンスにふさわしい方針によって偏微分方程式の固有値問題を主題として「クーラント–ヒルベルト本」を編んだのであったが，その内容は，第I巻が出版された後にシュレーディンガーによって提出された量子力学の基礎方程式に関する（束縛状態の）固有値問題を扱うのに必要な数学を，奇跡的ともいえる周到さで用意していた．このゆえにこそ「クーラント–ヒルベルト本」は物理学科の学生の必読書となったといえる．

ちなみに，これらの結果を超えて散乱状態（連続スペクトル）の解析を含む量子力学の数学が確立したのには，加藤敏夫先生とその高弟である池部晃生・黒田成俊両教授をはじめとする日本学派の功績が大きい．

ラックスは，量子力学の数学の基礎概念である作用素の自己共役性に関する，物理学者（ハイゼンベルク）と数学者（フリードリックス）の価値観（感

覚？）の違いに関するエピソードを紹介しているが，ヒルベルト空間における作用素論の抽象性とシュレーディンガー方程式の具体性とを踏まえた加藤先生の先駆的な業績はクーラントとその一門から高く評価されていた．

ラックスの序文の最後の部分では，クーラントの数理科学推進者としての力量と人々の傾倒を引き出した人間味が偲ばれている．ここで日本に関わるエピソードを紹介しておこう．1969 年に吉田耕作先生の東大退官記念行事でもあった国際会議『関数解析と関連分野』が東京で開かれたとき，81 歳のクーラントは，Guest of Conference の立場で来日し，K. Yosida, T. Kato たちによって拓かれた日本の関数解析とその応用に対して敬意を表しつつ，未来における日本の数学界へ期待を語ったのであったが，その際にクーラントに介添えしてこまやかな面倒見をしていたのが，既に大家であったラックスであった．会議の懇親会の席上で，そのことについての賛辞を藤田（筆者）がラックスに述べたところ，彼は「そのうちに，『クーラントと海外旅行をする方法』という本を書こうと思っている，それは自分にしか書けない」とのジョークを返してくれた．

*　　　*　　　*　　　*　　　*

さて，本書による我々の訳業についてであるが，敢えて「クーラント–ヒルベルト本」を和訳する趣旨は，まずは，古典中の古典でありながらいまも新鮮な感動を呼ぶ原著の長所——例えば線形代数での固有値問題から関数空間での微分作用素のそれへと鮮やかにグレードアップしてみせること，方法を中心に据えた展開の手際の良さなどを，ドイツ語に億劫さを覚える読者にも伝えたいとの願いである．ついで，クーラントに「世界においてアメリカに次いで次世代の数学研究の中心になるのは日本であろう」と期待されながら，要路の専門家から「忘れられた科学——数学」を懸念する文書が発せられる近年の日本では，覚悟新たに数理科学の興隆を図る努力が必要であること，ついては，その向きへの貢献が著しかった「クーラント–ヒルベルト本」を「学ぶべき先人の英知の書」として日本人に近づきやすい形で提供したいとの思いである．これからの数理科学の具体的な内容は伝統的な応用数学の域を超えて，情報，環境，生命，さらに脳神経等を対象とする新分野の興隆をも支

えるべきものであり，方法論もシミュレーションの重視を含めて多彩に構築されるべきであろうが，古典が伝える先人の熱意と英知は未来に生きると思われる．

こうした願いをこめての訳業であるので，読みやすさを旨としながらも，古典として格調を維持することを心がけたつもりである．しかしながら，我々の力量不足のために不備な点も少なくないと案じ，あらかじめ読者の寛容をお願いする次第である．

翻訳の作業の分担については，当初は章別に担当を決めたのであったが，進行につれて協力の仕方が混然となり，結局，全体に亘って訳者三人の共同作業によるものとなった．

なお,「クーラント–ヒルベルト本」の和訳については，ドイツ語原著 I, II 巻からの和訳書全 4 巻が 1959–1968 年の間に東京図書社から，監訳：斉藤利弥，各巻翻訳：丸山滋弥，銀林浩，麻嶋格次郎，筒井孝胤により刊行されている．今回の我々の訳業において少なからず参考とさせて頂いた．

最後に，我々の訳業の甚だしい遅滞に辛抱強く耐えて下さり，行き届いた支援と激励を惜しまれなかったシュプリンガー・ジャパン社および丸善出版社に対し衷心の謝意を表したい．

2012 年 10 月　訳者を代表して
藤田　宏

活用上の注意

- 原著所載の文献：原著の各章末に挙げられている文献や参考書には，現在では入手や利用が難しいものが多く，また（現時点での）通読のための依存の度合は強くないと思われるので省略した．一方，理論の形成に関与したものとして本文の中で脚注とともに挙げられている文献は，古典としての本書の位置づけに関わるので原表題のままに翻訳を省いて脚注に記載した．

- 用語法への注意：原著で用いられている専門用語のうち現在の用語法と異なるものについては，無理なく改め得るものは現代風に合わせたが，古典の雰囲気を尊重する趣旨から原語に近い訳を採用したものもある．いずれの場合も必要な注意を訳者注として添えている．

- 引用箇所の表示：本書では，他の部分を引用するに際して，その箇所を § 記号を頭に付けて章，節，小節の番号を連ねることにより示している．たとえば，§1.3.2 は第 1 章 3.2 節（3.2 節は 3 節の 2 小節）を指し，§2.1 は第 2 章 1 節を指す．

- 章末の「補足と問題」：各章の最後に設けられているこの表題の節の内容は，簡単なコメントから難解な発展話題まで多様である．読者の興味と準備に応じて拾い読みされるのが適当であろう．また，問題は，学習書における練習問題ではなく，研究レベルに近い（当時の）若手向きの演習課題である．問題を納得されるだけでも意義がある．

- 参考書・専門書：各章の理解の助けとなる教科書や参考書は，和書に限っても良書が多く出版されているので，あえて挙げなかった．一方，本書の延長上にある現代的な展開や発展への接続については，下巻に付する「訳者後書き」で触れるつもりである．

序文——前書き

第4版（原著）への序文

クーラント (Courant) とヒルベルト (Hilbert) による著作『数理物理学の方法』の第I巻は，数理解析，応用数学，物理学の専門家を育成する際に決定的に重要な，互いに有機的なつながりをもつ一連のテーマへの導入である．

本の内容は，解析的な立場で線形代数を述べることから始まる．その結果，無限次元の関数空間およびそこで働く作用素への一般化がごく自然に行なわれ，特殊関数を含む直交関数系の議論が展開される．同様な見方によって，（積分方程式についての）フレドホルム (Fredholm) の理論が，さらには，変分法の基礎事実が述べられる．連続体の力学系の振動に関する内容豊富な章も設けられているが，それは常微分方程式と偏微分方程式の固有関数の理論の行き届いた考察でもある．

初版の刊行以来70年になる現在でもなお，本書は上記のテーマへの卓越した入門書として役立つのである．読者は，テーマの核心をなす理念に向かってソフトにしかもスピーディに導かれると同時に，技巧的な詳細にわずらわされることなしに，これらの理論の応用を学ぶことができる．記述の仕方は，いわゆる「定義–定理–証明」のスタイルとは対極をなすものであり，式と式の間には多くの語りが加えられている．このことだけでも，クーラント–ヒルベルト本の新たな版の刊行は意義があるといえよう．

なお，クーラント–ヒルベルト本の第II巻の最後の章——英語版では除かれた章——がこの新版には含まれている．K.O. フリードリックス (Friedrichs)

が執筆したこの章は，他の部分よりも数学的な程度が高い．この章には楕円型偏微分方程式の境界値問題について，解の存在と固有関数の完全性の厳密な証明が含まれている．ここでも具体的な記述は，クーラントにとって身近な変分法の言葉で綴られているが，指導精神はヒルベルト空間のそれである．「なぜヒルベルト空間論の利器を駆使しなかったのですか」とある人がクーラントに尋ねたとき，彼，クーラントは，そうすると「数学の問題」を離れてヒルベルト空間論の問題との取り組みになってしまう恐れがあるのでね，と答えている．

クーラント–ヒルベルト本の第 I 巻が出版された 2 年後にシュレーディンガー (Schrödinger) が波動力学を発見した．これはその 1 年前にハイゼンベルク (Heisenberg) によって発見された量子力学の行列表現と等価（同値）なものであったが，シュレーディンガーの理論は偏微分作用素とその固有値，固有関数を用いて定式化されていた．ところが，幸いにも，シュレーディンガー方程式を理解し，かつ解くために必要な数学の多くを，クーラント–ヒルベルト本はすでに含んでいたのである．これは，物理学の新理論が必要とするものを数学が見越して発表していたという衝撃的な例の一つといえる．

数学指向の読者であれば自問されるかもしれない：「理論物理学が最も強く求めるものは自己共役作用素の厳密な理論ではなかったのか」と．これについて，フリードリックスは披露すべき次の経験をした．1960 年代のあるとき，たまたまハイゼンベルクに会ったフリードリックスは，その機会を利用して，かくも多くの美しい数学をもたらした量子力学の創始者に対して，数学者からの感謝の意を伝えた．ハイゼンベルクはその意を受け入れた．これに勢いづいたフリードリックスは，数学の側もある程度は物理学に対して恩返しができたと思うと言い添えた．ハイゼンベルクが一向に乗ってこない風情なので，フリードリックスは「フォン・ノイマン (von Neumann) という数学者がおりますが，彼は自己共役な作用素と単に対称というだけの作用素との間の相違を明らかにしました」とコメントした．それに対してハイゼンベルクは「その違いが何だというのです？」との問いを返したのであった．

本書の源がゲッティンゲンにおけるヒルベルトの講義にあるとはいえ，両者が同様である点は少ない．すでに 1924 年にはヒルベルトの興味は（数理）論理学の方に移っていたため，本書の執筆作業は完全にクーラントの手にゆ

だねられた．クーラントは偏微分作用素の固有値と固有関数に関する自身の研究の多くを取り入れている．本書のスタイルはクーラントの数学者としての個性を反映したものである．それは諸分野のパノラマであり，木にこだわることなく森をよく見ることができ，技巧的な詳細は真似することのできない軽やかな手際でスケッチされている．

クーラントの波乱に満ちた人生，収めた大成功，人を魅了する個性に興味をもたれる向きにはコンスタンス・リード (Constance Reid) による伝記 (Springer-Verlag 刊[1]) がお勧めである．この伝記の副題は英語版では『稀有な数学者の物語』となっている（ドイツ語版では『時代人としての数学者』）．クーラント，その人を知ったすべての者は，しばしば皮肉の装いのもとに伝わってくる彼の温かい心と友情を，懐疑とカップルされた彼のエネルギーと情熱を，そうしてまた，克服できそうにない障害に直面しても決して萎えることのなかった彼の楽天主義を，いつまでも思い起こすのである．

ルーン・レイク (Loon Lake)，N.Y. にて　1993 年 8 月
ピーター・ラックス (Peter Lax)

[1] ［訳註］加藤瑞枝による和訳は岩波書店刊，副題は『数学界の不死鳥』．

第3版への序文

『数理物理学の方法』が刊行されて以来（第I巻の第1版は1924年，同第2版は1930年，第II巻は1937年），この領域において様々な進歩が達成された．私は，第I巻の英語版および本質的に改変した第II巻の英語版（John Wiley-Interscience, New York，それぞれ1953年および1962年）において，これらの進歩に適応することを願ったのであったが，その試みは当然ながら分量の増大をもたらしたし，また，場所によっては，記述の直截（ちょくせつ）さを損なったかもしれない．

それゆえに，シュプリンガー社が，長らく「在庫切れ」であったこの著作を元のままの形で，より広い読者層に届くよう手配する決断をされたことを，私は嬉しく思うのである．

この新版が数学および物理学に関わる諸々の読者に，とりわけ学生諸君に対して大いに役立つことを願っている．

ここに，私はシュプリンガー社に衷心からの謝意を表わしたい．

ニュー・ロシェル (New Rochelle) にて　1967年10月

R. クーラント

初版への序文から

古くより数学は，解析学の問題および方法と物理学の直観的な問題提起との間にある密接な関係から，力強い刺激を得てきたのである．ところが最近の 10 年に到って，この関係に翳（かげ）りが見られる．すなわち，数学の研究がしばしばその直観的な出発点から遠ざかってしまい，特に解析学においては，方法の洗練と概念の尖鋭化に専らの努力が集中され過ぎているという次第である．その結果，解析学の代表者の多くが，自身の学問が物理学をはじめとする他分野と同属のものであるとの意識を失ってしまい，一方，物理学者の側では，数学者の問題や方法についてのみならず，そもそもの数学の研究領域や言葉に対する理解が失われるという有様である．疑うべくもなく，この傾向には科学全般に対する脅威が内在している．すなわち科学の発展の流れがますます細分化し，潤いを失い，遂には乾上ってしまう危険がある．このような運命を避けるためには，我われは総合的な視点から多様な事実を貫く内的な関係を明らかにすることによって，分離したものを再び一つにするべく，正しい方向に力を発揮しなければならない．そのようにしてこそ，学生たちは素材を効果的にマスターすることができ，研究者たちは有機的な研究展開の素地を用意できるのである．

本書の使命は，数理物理学の分野において，以上の目的に奉仕することである．18 世紀および 19 世紀の古典物理学の問題設定に関連して築かれた数学的方法を展開し，かつ得られた結果を一貫した数学理論に仕上げることを目指している．完全さは我われが敢えて追求するものではないが，本書の述べるところによって，重要かつ最も美しい関係に富んだ分野への参入が容易になることを願っている．純粋に方法的な内容を別にして，本書は専門家にとっても新しいであろう項目を多く含んでいる．

本書について，構想および執筆の大部分が自分の手によるものであるゆえに，私はそのすべての責任を負うものである．また，私は本書の多くの箇所において，個々の著者による原論文の少なからぬ部分をほとんど手を加えないで遠慮なしに引用させて頂いている．このような事情にもかかわらず，本書を世に出すにあたり，私の尊敬する恩師であり，同僚であり，さらに友人であるヒルベルトの名を共著者として掲げることに私が固執したのは，ヒル

ベルトの論文や講義からの材料がしばしば用いられていることへの配慮だけによるものではない．むしろ，何にもまして私は次のことを強調したい：本書に代表されている科学的ならびに教育的な努力は，永久にヒルベルトの名前と共に伝えられるべき数学的精神の「子供たち」なのである．

ゲッティンゲンにて　1924 年 2 月 11 日
R. クーラント

第 2 版への序文

第 2 版においても全般的な素材の配列に変わりはない．一方，この版は多くの項目について第 1 版になかった簡単化や拡張を含んでいる．それらの内容はこの間になされた進歩を考慮したものであり，いくつかの部分は今までここでのような形では未発表のものである．

ゲッティンゲンにおける私の若い友人たちの献身的な共同作業がなければ，本書を今回のように改めることはほとんど不可能であった．この点で私は，まず，すでに初版のときから私の助手であったクルト・フリードリックスに加えて，F. レリッヒと R. リューネブルグの名を挙げねばならない．この新版が彼らに負っている実質的なおかげの大きさは，本文中の個々の場所でその名前を挙げるだけではすまないものである．さらにフェンヒェル，ウェーハー，ウェーグナーの三氏については，原稿の批判的な精査および校正を通じての貴重な助力に対し，私は心から謝意を表するものである．

本書で扱う素材の構成については，詳しい目次がそれを明らかにしている．配列の趣旨については，素材よりもむしろ方法に重きを置いた．各章は然るべき程度に独立した単位になっており，本質的には他の章の知識なしに読むことができる．詳しい索引を利用すれば，読み方の方向づけが容易になろう．なお，文献，特に各章に添えてある文献表は体系的な完全性とは程遠いものである．

この第 2 版の出現は，本来「合わせて 2 巻もの」である本書を完結させるべき第 II 巻の刊行に関する私の義務の重さを倍増した．第 II 巻の仕上げの

遅れは，そこでの対象に関わる一連の問題点をなお完全に解明したいという私の願いのせいである．遠くない時期に結果を出し，それによって刊行の遅れを正当化できることを希望している．

ゲッティンゲンにて　1930 年 10 月

R. クーラント

目　次

第1章　線形変換と2次形式の代数 **1**

1.1　線形方程式系と線形変換 1

1.1.1　ベクトル 1

1.1.2　ベクトルの直交系，完全性 4

1.1.3　線形変換，行列 6

1.1.4　双線形形式，2次形式およびエルミート形式 13

1.1.5　直交変換およびユニタリ変換 16

1.2　線形パラメータを含む線形変換 18

1.3　2次形式およびエルミート形式の主軸変換 24

1.3.1　最大値原理に基づく主軸変換 25

1.3.2　特性値と固有値 28

1.3.3　エルミート形式への一般化 30

1.3.4　2次形式の慣性則 30

1.3.5　2次形式の解形式を表わす式 31

1.3.6　2次形式に伴なう連立1次方程式の解 32

1.4　固有値のミニ・マックス性 33

1.4.1　ミニ・マックス問題による固有値の特徴づけ 33

1.4.2　応用 35

1.5　第1章への補足と問題 37

1.5.1　線形独立性とグラムの行列式 37

1.5.2　行列式に対するアダマールの不等式 39
1.5.3　2 つの 2 次形式の標準形への同時変換 41
1.5.4　無限多変数の双線形形式と 2 次形式 42
1.5.5　無限小線形変換 43
1.5.6　摂動系 44
1.5.7　拘束条件 47
1.5.8　行列または双線形形式の単因子 47
1.5.9　ユニタリ行列のスペクトル 48

第 2 章　任意関数の級数展開問題　51

2.1　直交関数系 52
2.1.1　定義 52
2.1.2　関数の直交化 54
2.1.3　ベッセルの不等式・関数系の完全性・平均近似 . . . 55
2.1.4　無限多変数（無限成分）の直交変換およびユニタリ変換 59
2.1.5　多変数の場合での結果の成立・仮定の拡張 59
2.1.6　多変数関数の完全系の構成 60
2.2　関数の集積原理 61
2.2.1　関数空間における収束 61
2.3　独立尺度と次元数 66
2.3.1　独立尺度 66
2.3.2　関数列の漸近次元 67
2.4　ワイエルシュトラスの近似定理・ベキ関数および三角関数の完全性 70
2.4.1　ワイエルシュトラスの近似定理 70
2.4.2　多変数の関数への結果の拡張 72
2.4.3　導関数を含めての近似 73
2.4.4　三角関数の完全性 73
2.5　フーリエ級数 74
2.5.1　主定理の証明 74

2.5.2 多重フーリエ級数 78

2.5.3 フーリエ展開係数の大きさのオーダー 79

2.5.4 基本領域の伸縮 79

2.5.5 いくつかの例 80

2.6 フーリエ積分 82

2.6.1 主定理とその証明 82

2.6.2 多変数への結果の拡張 85

2.6.3 反転公式 85

2.7 フーリエ積分の例 86

2.7.1 偶関数・奇関数の場合のフーリエの積分公式 86

2.7.2 ディリクレの不連続因子 87

2.7.3 指数因数の例 87

2.7.4 変換で不変な関数 88

2.8 ルジャンドルの多項式 88

2.8.1 ベキ関数 1, x, x^2, . . . の直交化によるルジャンドルの多項式の生成 88

2.8.2 母関数 91

2.8.3 その他の性質 91

2.9 その他の直交系 92

2.9.1 ルジャンドルの多項式を導いた問題設定の一般化 . . 92

2.9.2 チェビシェフの多項式 94

2.9.3 ヤコビの多項式 96

2.9.4 エルミートの多項式 97

2.9.5 ラゲールの多項式 99

2.9.6 ラゲールの多項式およびエルミートの多項式の完全性 101

2.10 第 2 章への補足と問題 103

2.10.1 等周問題のフルヴィッツの解 103

2.10.2 反転公式 104

2.10.3 フーリエ積分と平均収束 105

2.10.4 フーリエ級数およびフーリエ積分によるスペクトル分解 106
2.10.5 密な関数系 107
2.10.6 ベキ関数の完全性に関するミュンツの定理 108
2.10.7 フェイェールの和定理 108
2.10.8 メリンの反転公式 109
2.10.9 ギブスの現象 112
2.10.10 グラムの行列式に関する一定理 114
2.10.11 ルベーグの積分概念の応用 115

第 3 章 線形積分方程式の理論 119

3.1 予備的考察 119
3.1.1 記号と基礎概念 119
3.1.2 関数の積分変換 120
3.1.3 退化核 122
3.2 退化核に対するフレドホルムの定理 123
3.3 任意の核に対するフレドホルムの定理 126
3.4 対称核とその固有値 129
3.4.1 対称核の固有値の存在 130
3.4.2 固有関数と固有値の全体 133
3.4.3 固有値の最大–最小性 140
3.5 展開定理とその応用 142
3.5.1 展開定理 142
3.5.2 非同次線形積分方程式の解法 144
3.5.3 反復核に対する双線形形式 145
3.5.4 マーサーの定理 147
3.6 ノイマン級数と解核 149
3.7 フレドホルムの公式 151
3.8 理論の新しい基礎づけ 156
3.8.1 補助定理 157
3.8.2 対称核の固有関数 158

3.8.3 非対称核 159
3.8.4 固有値と固有関数が核に連続的に依存すること . . . 160
3.9 理論の成立限界の拡張 161
3.10 第3章への補足と問題 163
3.10.1 例 163
3.10.2 特異積分方程式 164
3.10.3 フレドホルムの定理を導くシュミットの方法 165
3.10.4 対称積分方程式を解くエンスコグの方法 166
3.10.5 固有関数を定めるケロッグの方法 166
3.10.6 核の記号的関数とその固有値 167
3.10.7 固有関数をもたない非対称核の例 167
3.10.8 ヴォルテラの積分方程式 168
3.10.9 アーベルの積分方程式 168
3.10.10 非対称核に属する随伴直交系 169
3.10.11 第1種の積分方程式 170
3.10.12 無限多変数の方法 171
3.10.13 固有関数の最小性 171
3.10.14 極積分方程式 172
3.10.15 対称化できる核 173
3.10.16 関数方程式による解核の決定 173
3.10.17 定値核の連続性 173
3.10.18 ハンメルシュタインの定理 173

第4章 変分法の基本 **175**
4.1 変分法の問題の立て方 175
4.1.1 関数の最大・最小 175
4.1.2 汎関数 179
4.1.3 典型的な変分法の問題 180
4.1.4 変分法に特有な困難 184
4.2 直接解法への初歩 186
4.2.1 等周問題 186

4.2.2 リッツの方法・極小列 187
4.2.3 直接解法——差分法——無限個の変数 189
4.2.4 変分法の直接解法についての原理 194
4.3 変分法におけるオイラーの方程式 196
4.3.1 変分法の最も簡単な問題 196
4.3.2 未知関数が複数の問題 200
4.3.3 高次導関数を含む問題 202
4.3.4 多変数の問題 203
4.3.5 恒等的に 0 となるオイラーの微分式——発散形式 . . 205
4.3.6 オイラーの微分方程式の同次形 209
4.3.7 許容条件を緩くした変分問題
——デュ・ボア-レイモンとハールの定理 212
4.3.8 他種類の変分問題とその関数方程式 217
4.4 オイラーの微分方程式の積分：注意と例 219
4.5 境界条件 220
4.5.1 自由境界における自然境界条件 221
4.5.2 幾何学的問題・横断性 224
4.6 第 2 変分とルジャンドル条件 227
4.7 付帯条件のついた変分問題 230
4.7.1 等周問題 230
4.7.2 有限な付帯条件 233
4.7.3 付帯条件としての微分方程式 235
4.8 オイラーの微分方程式の不変性 237
4.8.1 関数空間における勾配としてのオイラーの式
——オイラーの式の不変性 237
4.8.2 Δu の変換・極座標での表示 239
4.8.3 楕円座標 241
4.9 変分問題の標準形および包合形への変換 246
4.9.1 付帯条件付きの通常の極小問題の変換 246
4.9.2 最も簡単な変分問題の包合的変換 249
4.9.3 変分問題の標準形への変換 255

4.9.4 一般化 256
4.10 変分法と数理物理学の微分方程式 259
4.10.1 一般的な注意 259
4.10.2 振動する弦（綱）および振動する棒 261
4.10.3 膜および板 263
4.11 第 4 章への補足と問題 269
4.11.1 与えられた微分方程式を停留条件にもつ変分問題 . . 269
4.11.2 等周問題における相反性 269
4.11.3 円形の光線 269
4.11.4 ディドの問題 270
4.11.5 空間での問題の例 270
4.11.6 曲面上の等周問題 270
4.11.7 インディカトリクスとその応用 270
4.11.8 変化する領域に対する変分 272
4.11.9 不変な変分問題についてのネーターの定理・質点力学の積分 275
4.11.10 多重積分での横断性 279
4.11.11 曲面におけるオイラーの微分式 279
4.11.12 静電気学におけるトムソンの原理 280
4.11.13 弾性体における平衡問題——カスティリャノの原理 . 281
4.11.14 梁の理論におけるカスティリャノの原理 284
4.11.15 座屈の変分問題 285

上巻の索引 **289**

第1章　線形変換と2次形式の代数

本書で取り扱う数学解析の数多くの問題は，類似性と内的な関連において線形変換および2次形式の理論に密接に結びついている．それゆえこれら分野への導入を行ない，我われの見地から重要な事項をできるだけ簡単に概観することにしよう．なお，その際に触れる話題については読者がある程度の予備知識をそなえていることを想定している．

1.1　線形方程式系と線形変換

1.1.1　ベクトル

線形方程式の理論として知られている事実を簡潔に述べるためには，ベクトル算法の記号を用いるのが便利である．n 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の組を n 次元のベクトル，または，**n 次元空間のベクトル**と呼び，それを $\mathbf{x}$ で表わす．数 x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を $\mathbf{x}$ の**成分**という．成分がすべて 0 であるベクトルはベクトル $\mathbf{0}$，あるいは **0 ベクトル**と呼ばれる．よく知られているように，$n = 2$ あるいは $n = 3$ の場合には，ベクトルの最も素朴な幾何学的な意味は「位置ベクトル」のそれ，すなわち，直交座標系において原点から各座標が x_i である点に至る矢線ベクトルである．$n > 3$ に対しては実際的な幾何学的直感は通用しなくなるが，それでも，幾何学的な言い方は事柄の本質に適している．

さて，2つの実数 λ, μ が与えられたとき，ベクトル $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \mathbf{z}$ は，$\mathbf{x}$,

$\mathbf{y}$ の成分 x_i, y_i から $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$ によって定められる z_i を成分とするベクトルである．これより，特別の場合として，2 つのベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の和および差が定義される．

2 つのベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の**内積**は

$$(1) \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

によって定義される実数である．

内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を**ベクトル $\mathbf{y}$ の $\mathbf{x}$ に関する成分**，または，逆に $\mathbf{x}$ の $\mathbf{y}$ に関する成分と呼ぶことがある．

内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が 0 のとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは互いに直交する，あるいは，**垂直**であるという．$n = 2, 3$ のときは，この用語は言葉通りの意味をもっている．ベクトルそれ自身との内積 $N\mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ は $\mathbf{x}$ の**ノルム平方**と呼ばれ，特別な役割を果たす．$\mathbf{x}^2$ の正の平方根をベクトル $\mathbf{x}$ の**長さ**，あるいは，ベクトルの**大きさ**といい，記号 $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2}$ で表わす[1]．長さ 1 のベクトルを**正規化されたベクトル**，あるいは，**単位ベクトル**と呼ぶ．

2 つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ の内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ に対して，次の不等式が成り立つ．

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \leqq \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2.$$

すなわち，ベクトル記号を使わない形では

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

上の不等式における等号は a_i と b_i とが比例するとき，そのときに限り成立する．すなわち $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = 0$ となるような少なくとも一方は 0 でない λ, μ が存在するときである．

シュヴァルツ (Schwarz) **の不等式**と呼ばれる上の不等式を示すには，次のことに注意すればよい．未知数 x についての 2 次方程式

---

1 ［訳註］現在の用法では $|\mathbf{x}|$ が $\mathbf{x}$ のノルムである．混乱を避けつつ，$\mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2$ を $\mathbf{x}$ のノルムと呼んだ原著の用語法に配慮して，本訳書では $\mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2$ を $\mathbf{x}$ のノルム平方 (norm squared) と呼ぶことにする．

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$$

は異なる実数解をもつことはない．また a_i と b_i が比例する場合を除いては，虚数解をもつ．この事実に対する条件を 2 次方程式の判別式を用いて書き表わしたものがシュヴァルツの不等式にほかならない．シュヴァルツの不等式の別証明は，恒等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_j b_k - a_k b_j)^2$$

から直ちに得られる．

ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ が互いに**線形独立**であるとは，すべてが 0 ではないような係数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ で，

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

を成り立たせるものが存在しないこと，すなわち，上式左辺のベクトルの成分をすべて 0 にするような，全部は 0 ではない係数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を見出すことが不可能なことである．そうでないとき，すなわちベクトルが線形独立でない場合，それらのベクトルは**線形従属**であるという．

n 次元空間で，成分が次の配列の各行により与えられる n 個のベクトルを順に $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ とすれば，これらは線形独立である．

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}$$

なぜなら，もし等式 $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ が成り立つとすれば，これに $\mathbf{e}_h$ を掛けて，$\mathbf{e}_h^2 = 1$, $(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = 0$ $(h \neq k)$ を用いれば直ちに $\lambda_h = 0$ が得られるからである．

こうして，n 次元空間で互いに線形独立な n 個のベクトルが確かに存在することがわかったが，他方，$(n+1)$ 個のベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n+1}$ については，0 ばかりではない係数に対して線形等式

$$\mu_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \mu_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0}$$

が成り立つことが必ずある．なぜなら，$(n+1)$ 個の未知数 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$ についての n 個の線形同次方程式系

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_{ik}\mu_i = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

は 0, 0, ..., 0 以外の解を必ずもつからである（§1.1.3 参照）．

1.1.2　ベクトルの直交系，完全性

上の**座標系ベクトル** $\mathbf{e}_i$ の組は，**正規直交系**という特別な系をなしている．前のように，長さ1のベクトルを単位ベクトルと呼ぶ．一般に n 個の単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ が正規直交系であるとは，関係式

$$\mathbf{e}_h^2 = 1, \quad (\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = 0 \quad (h \neq k)$$

が $h, k = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つことである．このとき，n 個のベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ が互いに線形独立であることが，前と全く同様にして得られる．

$\mathbf{x}$ を任意のベクトルとする．$(n+1)$ 個のベクトルは必ず線形従属なので，全部は0にならない係数 c_i を適当にとれば

$$c_0\mathbf{x} - c_1\mathbf{e}_1 - \cdots - c_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

が成立する．ところが $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ が線形独立であることから c_0 は0ではあり得ない．ゆえに $c_0 = 1$ ととってよい．こうして，任意のベクトル $\mathbf{x}$ は正規直交系によって

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n \tag{2}$$

の形に表わされる．**系 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ に関する $\mathbf{x}$ の成分**である c_i の値については，(2) に $\mathbf{e}_i$ を掛けることにより

$$c_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$$

が得られる．

任意の線形独立な m 個のベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ の系が与えられたとき，

これから次のような**直交化**の手順によって m 個の単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ からなる正規直交系をつくることができる.

まず, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$ とおく. 次に, 同時には 0 にならない 2 つの数 c_1', c_2' を $c_1'\mathbf{e}_1 + c_2'\mathbf{b}_2$ が $\mathbf{e}_1$ と直交するように, すなわち, $c_1' + c_2'(\mathbf{b}_2, \mathbf{e}_1) = 0$ が成り立つように選ぶ. $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ が線形独立であり, よって $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{b}_2$ も線形独立であるから, ベクトル $c_1'\mathbf{e}_1 + c_2'\mathbf{b}_2$ は $\mathbf{0}$ にならない. このベクトルをそれ自身の長さで割ることにより, $\mathbf{e}_1$ に直交する単位ベクトル $\mathbf{e}_2$ が得られる. さらに, すべては 0 でないような数 c_1'', c_2'', c_3'' を, $c_1''\mathbf{e}_1 + c_2''\mathbf{e}_2 + c_3''\mathbf{e}_3$ が $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ に直交するように, すなわち, $c_1'' + c_3''(\mathbf{b}_3, \mathbf{e}_1) = 0$, $c_2'' + c_3''(\mathbf{b}_3, \mathbf{e}_2) = 0$ が成り立つように選ぶ. ベクトル $c_1''\mathbf{e}_1 + c_2''\mathbf{e}_2 + c_3''\mathbf{e}_3$ はやはり $\mathbf{0}$ にはならないので, これを正規化して $\mathbf{e}_3$ が得られる. この手順を続けていけば目指す直交系に到達する.

m 個のベクトルからなる直交系は, $m < n$ ならば不完全直交系であり, $m = n$ ならば**完全直交系**という. ベクトル $\mathbf{x}$ の $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ についての成分を再び $c_1, \ldots, c_m$ とおくとき, 不等式

$$(\mathbf{x} - c_1\mathbf{e}_1 - \cdots - c_m\mathbf{e}_m)^2 \geqq 0$$

は明らかである. ここで左辺の平方を代数的な演算則に従って計算すると,

$$\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\sum_{i=1}^{m} c_i\mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{m} c_i^2 = \mathbf{x}^2 - 2\sum c_i^2 + \sum c_i^2 \geqq 0,$$

あるいは

$$\mathbf{x}^2 \geqq \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \tag{3}$$

が導かれる. ここで $m \leqq n$, $c_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ である. $m = n$ の場合には等式

$$\mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \tag{4}$$

が成り立つ.

上の 2 つの関係は, ピタゴラスの定理（三平方の定理）のベクトル版を含んでいる. 実際, $n \leqq 3$ のときには図形的な直感の通りである. (3), (4) を, それぞれベッセル (Bessel) の**不等式**, **完全性の等式**（パーセバル (Parseval)

の等式）と呼ぶことが多い．実際，等式 (4) がすべてのベクトル $\mathbf{x}$ に対して成り立つならば，その直交系は完全系である．なぜなら，(4) は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ のすべてに直交するような正規化されたベクトル $\mathbf{x}$ に対しては成り立たないが，$m < n$ ならばそのようなベクトルが存在するからである．

なお，完全性の等式を，より一般的な形，すなわち

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{i=1}^{m} c_i c_i' \tag{5}$$

と表わしてもよい．これは $\mathbf{e}_i$ の直交性から容易に導かれる．

すべてこれらの代数的な関係は，いまのところ形式的な性格のものである．これらの関係は，解析学の超越的な問題に対して形式的に完全な類似性をもって再現すること——それは平凡ではない——によって深い意味を得るのである．

1.1.3　線形変換，行列

与えられた係数 a_{ik} を用いた n 個の線形な等式（連立一次方程式）

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots\ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}\right. \tag{6}$$

によって，値の組 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対応して，値の組 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が一意に定まる．この対応を，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を $y_1, y_2, \ldots, y_n$ に写す**線形変換**，すなわち，ベクトル $\mathbf{x}$ をベクトル $\mathbf{y}$ に写す線形変換という．変換の線形性とは，ベクトル $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2$ にはベクトル $\lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2$ が対応することを意味している．

線形変換に関して扱われる問題で，最も重要なものはその逆変換である．いいかえれば，連立一次方程式を解く問題である．この問題への解答は，一次方程式に関する次の主要定理によって与えられる．なお，この定理の証明は既知であるとしよう．

《定理》連立方程式

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2, \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots\ \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n,
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = y_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7}
$$

の解の有無については，係数 (a_{ik}) に応じて次の 2 つのどちらかに場合が分かれる．第 1 の場合には，任意に与えられた $\mathbf{y}$ に対して解 $\mathbf{x}$ が一意に存在する．特に $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ に対する一意解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる．他方，第 2 の場合には，(7) において $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ とした同次方程式が，線形独立な（従って $\mathbf{0}$ とは異なる）ρ 個 $(\rho > 0)$ の解 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\rho$ をもつ．なお $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\rho$ は正規化されていると仮定してよい．第 2 の場合には，$a'_{ik} = a_{ki}$ を係数とする転置方程式

$$
\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}x'_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{8}
$$

もちょうど ρ 個の線形独立な，$\mathbf{0}$ とは異なる解 $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \ldots, \mathbf{x}'_\rho$ をもつ．そうして非同次方程式 (7) は，$\mathbf{y}$ が条件 $(\mathbf{y}, \mathbf{x}'_1) = 0, \ldots, (\mathbf{y}, \mathbf{x}'_\rho) = 0$ を満たすときに限り，すなわち，$\mathbf{y}$ が $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \ldots, \mathbf{x}'_\rho$ のすべてと直交するときに限って解をもつ．ただし，その解は同次方程式の任意の解だけの付加的な不定性を除いて一意に定まる．□

上の主要定理の定式化は行列式の理論に依存しないように述べられている．あとで行なうように，定理からさらに進んで，連立方程式の解を式で書いてみせるためには行列式が必要である．

このような線形変換の本質を定めるのは係数の表，すなわち方程式 (7) の（係数）**行列**である：

$$
A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{9}
$$

この行列の行列式を

$$\mathsf{A} = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で表わすことにしよう．

場合によっては，変換そのものを**テンソル**あるいは**作用素**と呼んで，特別な文字 $\mathfrak{A}$ で表わすのが便利である．行列 A の成分 a_{ik} はテンソル $\mathfrak{A}$ の成分である．線形変換 (7) をテンソル $\mathfrak{A}$ とベクトル $\mathbf{x}$ の**積**とみなし，記号では

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

と書くことができる．

線形代数の多くの事項は，行列についての主張の形に述べることにより，そうして**行列についての基本的な定義や計算公式**を用いることによって，内容をより簡潔に表わすことができる．最初に，行列の積という概念を考えよう．これは上の連立方程式 (7) によって変換されるベクトル $\mathbf{x}$ 自身が，成分 b_{ik} の第2のテンソル $\mathfrak{B}$ と他のベクトル $\mathbf{w}$ との積に等しいと想定することによって生ずる概念である．すなわち，行列 $B = (b_{ik})$ とするとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{w}$ は連立一次方程式

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} w_k = x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

によって結ばれているとみなすのである．このとき $\mathbf{x}$ は $\mathbf{w}$ とあるテンソル $\mathfrak{C}$ の積として得られる．$\mathfrak{C}$ の行列 C は A と B から**行列の掛算の公式**に従って求められる，

$$C = AB.$$

すなわち行列成分 c_{ik} は A の第 i 行と B の第 k 行との内積である：

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \quad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

テンソル（あるいは変換）$\mathfrak{C}$ を**2つのテンソル（あるいは変換）$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ の**

積という．今後，テンソルとそれに対応する行列を区別しないことにしよう．行列の積に関しては**結合法則**

$$(AB)C = A(BC)$$

が成立している．従って順序さえ決めれば，多くの行列の積 $A_1A_2\cdots A_k$ の意味が完全に定まる．$A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$ のとき，この積を，行列 A の k 乗 A^k と書く．

他方，行列の乗法については，**交換法則が一般には成立しない**ことに注意しよう．A に B を**前から**乗ずるのと**後から**乗ずるのとは，すなわち BA と AB とは一般に異なる．最後に，行列 $\lambda A + \mu B$ は成分が $\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}$ である行列として定義される．成分がすべて 0 である行列を零行列 O という[2]．さらに**分配法則**

$$(A+B)C = AC + BC$$

が成立することも直ちにわかる[3]．

いろいろな目的のために，**単位行列**

$$E = (e_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を導入する必要がある．E は任意の行列 A に対して

$$AE = EA = A$$

を満足する．単位行列は，方程式

$$x_i = y_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

---

[2] ［原註］行列の計算では，次のことに注意しなければならない．すなわち，行列方程式 $AB = O$ であるからといって因子 A または B のどちらか一方が O となるとは限らない．たとえば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[3] ［訳註］右分配法則 $A(B+C) = AB + AC$ も成り立つ．

によって与えられる**恒等変換**に対応している．どんな行列に対しても，その0乗は E であると規約する：

$$A^0 = E.$$

行列のベキ A^k が定義されると，行列を変数とする多項式も定義される．すなわち

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

を変数 x の m 次多項式とするとき，等式

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

によって，$f(A)$ なる行列が，行列 A の多項式として定義される．A の関数 $f(A)$ の定義は，多項式では表わすことができない関数に対しても拡張される．たとえば行列 e^A は，等式

$$B = e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu!}$$

によって定義される．なお，このような（無限）級数は次のように意味づけされる：まず最初の N 項の和をつくる．その和行列の n^2 個の成分が N を大きくするとき収束するかどうかを調べる．n^2 個の成分のすべてが収束するならば，それらの極限値を成分とする行列がこの級数の値である．行列 e^A の場合は，あとで示すように常に収束する．

関数 $f(A)$ として**幾何級数**をとることによって，行列に関する極めて重要な関係が導かれる．幾何級数の部分和

$$S_m = E + A + A^2 + \cdots + A^m$$

を考える．この S_m の定義式に A を掛けて E を加えると

$$S_m A + E = S_m + A^{m+1}$$

となり，それから

$$S_m(E - A) = E - A^{m+1}$$

が導かれる．ここで，m が増大するにつれて行列 S_m が極限 S に近づくとす

れば，当然 A^{m+1} は O に収束する．こうして無限幾何級数によって定義された行列

$$S = E + A + A^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu} = f(A)$$

に対する関係

$$S(E - A) = E$$

が得られる．

無限幾何級数は，行列の**ノイマン** (Neumann) **級数**と呼ばれるが，これがいつ収束するかという問題については次節で調べることにする．

行列の多項式は普通の x の多項式と全く同様に扱うことができる．たとえば x の多項式に関する恒等式があれば，任意の行列 A に対して対応する恒等式が成立する．たとえば，恒等式

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \equiv (x^2 + 1)(x + 2) + (2x + 2)$$

に対応して，任意の行列 A に対する恒等式

$$A^3 + 2A^2 + 3A + 4E \equiv (A^2 + E)(A + 2E) + (2A + 2E)$$

が成立する．同じく，因数分解

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \\ &= a_m (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m) \end{aligned}$$

——ここで $x_1, x_2, \ldots, x_m$ は多項式 $f(x)$ の零点である——に対応して任意の行列 A に対する因数分解が成立する：

$$\begin{aligned} f(A) &= a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m \\ &= a_m (A - x_1 E)(A - x_2 E) \cdots (A - x_m E). \end{aligned}$$

成分 a_{ik} の行列 A に対して，しばしば次のように別の行列を対応させることがある．ここで，行列成分として複素数を許すとしよう．$\bar{a}_{ik}$ を a_{ik} に共役な複素数とするとき $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ を A に（複素）**共役な行列**という．さらに A の行と列とを入れ換えて得られる行列 $A' = (a_{ki})$ を A の**転置行列**という．

最後に $A^* = \bar{A}' = (\bar{a}_{ki})$ を A の**随伴行列**という．これは成分の複素共役をとり，さらに行と列とを入れ換えたものである．

すぐに確かめられる等式

$$(AB)' = B'A'$$

が成立する．$A = A'$ であるような行列を**対称行列**といい，実行列で

$$AA' = E$$

を満たすものを**直交行列**という．最後に，一般の複素行列のうちで

$$AA^* = E$$

であるものを**ユニタリ行列**という．

行列式論から知られるように，線形変換 (7) の逆変換，すなわち (7) の解法は，行列式 $\mathsf{A} = |a_{ik}|$ が 0 でないとき，またそのときに限り，任意の y_i に対して可能である．この場合，解は一意的であり，次の等式

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \breve{a}_{ik} y_k \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

によって与えられる．ここで，よく知られているように，A_{ki} を a_{ki} に対する A の余因子として，

$$\breve{a}_{ik} = \frac{\mathsf{A}_{ki}}{\mathsf{A}} \tag{12}$$

である．行列 $\breve{A} = (\breve{a}_{ik})$ を行列 A の**逆行列**というが，

$$\breve{A}A = A\breve{A} = E$$

なる関係によって一意的に定まる行列である．この $\breve{A}$ を A^{-1} と書く．A^{-1} の行列式の値は A^{-1} である．行列式が 0 でないような行列 A を係数行列とする連立一次方程式の解は，行列代数の言葉でいえば，

$$AB = BA = E$$

を満たす行列 $B = A^{-1}$ によって決定される．

1.1.4 双線形形式，2 次形式およびエルミート形式

連立一次方程式 (7) を見通しよく概観するのに，この方程式と同値な，行列 A に付随する次の**双線形形式**を使うことができる：

$$A(u,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_i x_k. \tag{13}$$

この双線形形式は，連立方程式 (7) の左辺の $x_1,\ldots,x_n$ に関する一次形式に未定量 $u_1,\ldots,u_n$ を掛けて加えたものである．こうして連立方程式 (7) の代わりとして，u について恒等的に成立する単独の方程式

$$A(u,x)=E(u,y) \tag{14}$$

を得るのである．ここで $E(u,y)=\sum_{i=1}^{n}u_i y_i$ は単位行列に対する双線形形式，すなわち**単位双線形形式**である．

2 つの行列 A, B のそれぞれに対する 2 つの双線形形式 $A(u,x)$, $B(u,x)$ の記号的 (symbolic) な**積**は，行列 $C=AB$ に対する双線形形式 $C(u,x)$ として定義される．また h 乗のベキ $A^h(u,x)$ を h 次**反復形式**とも呼ぶ．

行列 A^{-1} に対応する双線形形式である**逆双線形形式** $A^{-1}(u,x)$ は，行列式の定理を用いれば

$$A^{-1}(u,x)=-\frac{\mathsf{A}(u,x)}{\mathsf{A}} \tag{15}$$

の形に表わされる．ここに

$$\mathsf{A}(u,x)=\begin{vmatrix}0 & u_1 & \cdots & u_n\\ x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=-\sum_{i,k=1}^{n}\mathsf{A}_{ik}x_i u_k$$

である．

条件 $a_{ki}=a_{ik}$ によって定義される**対称な線形変換**は特に興味深い．これを調べるのには，もとの双線形形式で $u_i=x_i$ とおいた **2 次形式**

$$A(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_i x_k \qquad (a_{ki}=a_{ik})$$

を考察すれば十分である．なぜなら2次形式 $A(x,x)$ が与えられれば，これから対応する対称な双線形形式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_i x_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial A(x,x)}{\partial x_i} = \frac{A(x+u,x+u)-A(x,x)-A(u,u)}{2}$$

が得られるからである．この双線形形式を2次形式 $A(x,x)$ に属する**極形式**という．

$A(u,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_i x_k$ を任意の，対称ではない（実係数の）双線形形式とするとき，$AA'(u,x)$, $A'A(u,x)$ は共に対称な双線形形式であり，それぞれ

$$AA'(u,x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i \sum_{i=1}^{n} a_{ik}u_i\right),$$

$$A'A(u,x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k\right)$$

で与えられる．これから，2次形式

$$AA'(x,x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i\right)^2,$$

$$A'A(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right)^2$$

もつくられる．

これらの2次形式は，平方の和になっているから非負の値しかとらない．このような2次形式を**正定値の2次形式**という．

多くの目的に対して重要な2次形式の一般化は**エルミート** (Hermite) **形式**である．これは複素数の係数をもつ双線形形式

$$A(u,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_i x_k$$

において，係数 a_{ik} が条件

$$a_{ik} = \overline{a}_{ki}$$

を満たすものである．従ってエルミート形式は，変数 u_i を x_i に共役な複素数にとれば必ず実数の値をとる．そこで，エルミート形式を

$$H(x,\bar{x})=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_i\bar{x}_k=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ki}\bar{x}_i x_k$$

と書く習慣がある．

任意の複素係数双線形形式

$$A(u,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_i x_k$$

にやはり前と同様にエルミート形式

$$AA^*(x,\bar{x})=A\bar{A}'(x,\bar{x})=\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i\right|^2$$

および

$$A^*A(x,\bar{x})=\bar{A}'A(x,\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{x}_k\right|^2$$

が対応する．

さて，双線形形式

$$A(x,y)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_i y_k$$

において，変数 x, y に，それぞれ行列が C, B による変換

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\zeta_k \quad \text{および} \quad y_i=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\eta_k$$

をほどこすと

$$A(x,y)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_i y_k=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ik}c_{ij}b_{kl}\zeta_j\eta_l$$

$$=\sum_{j,l=1}^{n}p_{jl}\zeta_j\eta_l \quad \text{ただし} \quad p_{jl}=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}c_{ij}b_{kl}$$

が得られる．これは A から変換された双線形形式であり，その行列は

$$(p_{jl})=C'AB$$

である．なお，この行列の行列式は ABC である．特に注意したいのは，対称

な行列 $K=(k_{pq})$ をもつ2次形式

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq}x_px_q$$

に対して，$C=B$ とおいて変数 x を変換した場合である．このときは，対称な行列 $C'KC$ に対応する2次形式が得られ，$\mathsf{K}=|k_{pq}|$ とすれば，変換された行列 $C'KC$ の行列式は KC^2 である．

1.1.5　直交変換およびユニタリ変換

実行列 $L=(l_{pq})$ による線形変換 $\mathfrak{L}$

(16) $$x_p=\sum_{q=1}^{n} l_{pq}y_q=L_p(y)\quad (p=1,\ldots,n)$$

ただし，行列式は $\Gamma=|l_{pq}|$

が，**直交変換**になるための条件を明らかにしよう．すなわち，(16) が**単位2次形式**

$$E(x,x)=\sum_{p=1}^{n} x_p^2$$

をそれ自身に写す条件，いいかえれば y_p について恒等的に

(17) $$E(x,x)=E(y,y)$$

が成り立つための条件を見つけるのである．

すでに得られている変換規則を2次形式 $A(x,x)=E(x,x)$ に適用することにより，線形変換 $\mathfrak{L}$ が直交であるための必要十分条件が (17) から次のように導かれる：

(18) $$L'EL=L'L=LL'=E \quad \text{および} \quad L'=L^{-1}.$$

これより，直交変換の行列の転置行列は自身の逆行列に一致する．従って方程式 (16) の解は，同じく直交変換

(19) $$y_p=\sum_{q=1}^{n} l_{qp}x_q={L_p}'(x)$$

によって与えられる．また直交変換の行列は前に p. 12 で定義した直交行列であることがわかる．直交行列であるための条件を係数について書きあげれば

$$(20)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu p}^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu p} l_{\nu q} = 0 \qquad (q \neq p)$$

あるいは（同値なことであるが）

$$(21)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} l_{p\nu}^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} l_{p\nu} l_{q\nu} = 0 \qquad (q \neq p)$$

となる．

行列式に関しては (18) から直ちに $\Gamma^2 = 1$ が得られ，直交変換の行列式は $+1$ または -1 であることがわかる．さらに任意の 2 次形式の行列式は直交変換によって不変であることもわかる．

行列 A, B の定める 2 つの双線形形式，および直交変換の行列 L に対して，等式 (18) を用いれば，関係 $L'(AB)L = (L'AL) \cdot (L'BL)$ が得られる．これは 2 つの 2 次形式の（記号的な）積形式の直交変換は，おのおのの 2 次形式を直交変換したものの積であることを示している．このことから特に互いに逆行列である 2 つの形式を変換したものは，やはりまた互いの逆形式である．

以上の考察をエルミート形式

$$H(x, \bar{x}) = \sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q$$

に対して一般化しようとすれば，**ユニタリ変換**を用いることになる．複素係数 l_{pq} の定める変換

$$x_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} y_q$$

がユニタリ変換であるとは，それが**単位エルミート形式**

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = \sum_{p=1}^{n} x_p \bar{x}_p$$

を再び単位形式に写す変換であること，すなわち

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = \sum_{p=1}^{n} |y_p|^2$$

が成り立つことである．上と全く同様にして，その行列が L である変換がユニタリ性をもつための必要十分条件は，$L^* = \bar{L}'$ をその随伴行列として，等式

$$LL^* = L^*L = E$$

が成り立つことである．従って p. 12 の定義により L はユニタリ行列でなければならない．この**ユニタリ性**を書きあげれば

(22) $$\sum_{\nu=1}^{n} |l_{\nu p}|^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu p}\bar{l}_{\nu q} = 0 \qquad (q \neq p)$$

あるいは

(23) $$\sum_{\nu=1}^{n} |l_{p\nu}|^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} l_{p\nu}\bar{l}_{q\nu} = 0 \qquad (q \neq p)$$

となる．

$LL^* = E$ からすぐにわかるように，ユニタリ変換の行列式は絶対値が1である．

1.2　線形パラメータを含む線形変換

多くの問題において，線形変換に関する連立方程式が次の形で現れる：

(24) $$x_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} t_{ik}x_k = y_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

ここに λ は（複素数値の）パラメータである．これに対応する双線形形式は，行列 $T = (t_{ik})$ をもつ双線形形式を $T(u, x)$ として，$E(u, x) - \lambda T(u, x)$ と書くことができる．

連立方程式 (24) を解くことは，前節に述べたように，等式 $(E - \lambda T) \cdot R = E$ を満たす行列 R をもつ逆双線形形式 $R(u, y; \lambda)$ を見出すことと同値である．この逆行列 R は行列式 $|E - \lambda T|$ が0でないとき，またそのときに限り存在することはわかっている．この行列式は λ を変数とする高々 n 次の多項式であるから，($T \neq 0$ とすれば）逆形式 R が存在しないような λ は高々有限個，すなわちこの多項式の零点 λ_i だけ存在する．これらの値 λ_i のおのおのを，行列 E に関する T の**逆固有値**といい，λ_i の全体を T の E に関する**逆スペ**

クトルという．($\kappa E - T$ の逆が存在しないような $\kappa_i = 1/\lambda_i$ を行列 T の固有値といい，その全体を T のスペクトルということが多い[4].)

方程式 (24) の特殊な形は，逐次近似による解法を示唆している．それを行なうには，方程式を

$$x_i = y_i + \lambda \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k$$

と書きかえ，右辺の x_k に再び

$$x_k = y_k + \lambda \sum_{j=1}^{n} t_{kj} x_j$$

を代入する．そうしてこの操作を続けていくのである．この手順は行列の等式 $R = E + \lambda TR$ を用いるとわかりやすく記述できる．すなわち上の関係から R への代入を繰り返して

$$\begin{aligned} R &= E + \lambda TR = E + \lambda T(E + \lambda TR) = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 R \\ &= E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \lambda^3 T^3 R = \cdots \end{aligned}$$

が得られる．この手順が収束するならば R の無限級数表示に到達する：

$$R = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \lambda^3 T^3 + \cdots .$$

これは——その収束を仮定してのことであるが——実際に $E - \lambda T$ の逆行列を与える．そのことを示すには，この級数に $E - \lambda T$ を掛け，収束を仮定するときは積は項別に行なってよいことを考慮すればよい．

$$R = (E - \lambda T)^{-1} = E + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \cdots$$

は形式的に普通の幾何級数（等比級数）に一致しているが，実際にそうである理由は次のことからわかる．それは pp. 10–11 の内容が $A = \lambda T$ とおくことにより，形式的にいまの場合に適用できるからである．

出発点の連立方程式を，行列でなく，対応する双線形形式を使って書いて

---

4 ［訳註］実は原著では λ_i のことを T の固有値と呼んでいるが，当訳書では現代の用語法（および英訳）に合わせて λ_i の逆数 $\kappa_i = 1/\lambda_i$ を（T の）固有値と呼ぶことにした．それに応じて λ_i 自身は T の逆固有値 (reciprocal eigenvalue) と呼ぶことにした．

みよう：

$$E(u,x)-\lambda T(u,x)=E(u,y)$$

これに応じて，解は上式に全く対称的に

$$E(u,y)+\lambda \mathsf{T}(u,y;\,\lambda)=E(u,x)$$

の形に双線形形式で与えられる．ここに

$$\mathsf{T}(u,y;\,\lambda)=T+\lambda T^2+\lambda^2 T^3+\cdots=\frac{R(u,y;\lambda)-E(u,y)}{\lambda}$$

である．形式 T は T の**解形式** (resolvent) と呼ばれる．

R に対する**ノイマン級数**，あるいはそれに応ずる T の級数が，十分小さな $|\lambda|$ に対して収束する証明は容易である．

M を係数 t_{ik} の絶対値の上界とすれば，すぐわかるように $T^2, T^3, \ldots, T^h$ の係数の絶対値の上界として $nM^2, n^2M^3, \ldots, n^{h-1}M^h$ をとることができる．ゆえに

$$(M+\lambda nM^2+\lambda^2 n^2 M^3+\cdots)(|u_1|+\cdots+|u_n|)(|y_1|+\cdots+|y_n|)$$

が（双線形形式における）ノイマン級数の優級数[5]となる．これらの優級数は $|\lambda|<1/nM$ のとき確かに収束する．従って十分小さい $|\lambda|$ の値に対してノイマン級数は収束し，確かに $T(u,x)$ の解形式を表わす[6]．

---

5 ［訳註］級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \geqq |a_n|$ なる級数を優級数という．優級数が収束するならばもとの級数は（絶対）収束である．

6 ［原註］ここに述べた優級数の収束は明らかに n が増すにしたがって遅くなる．しかしこれについては，次のような少々の精密化によって n と独立な収束限界の評価を簡単に導くことができる．従ってこれは，無限個の変数に拡張する際にも使用できる．行列 T^ν の要素を $t_{ik}^{(\nu)}$ で表わす．まず $\sum_{\alpha=1}^{n} |t_{p\alpha}^{(1)}| = z_p$ とおき，M がすべての n についての z_p の上界であるとする．(いわば M は列要素の絶対値の和の上界である.) $\sum_{q=1}^{n} |t_{pq}^{(\nu)}| \leqq M^\nu$ が成立することを帰納法で示そう．これが成立すればもちろんすべての $p,q=1,\ldots,n$ と任意の ν について

$$|t_{pq}^{(\nu)}| \leqq M^\nu$$

となる．これから直ちに，上のノイマン級数が $|\lambda|<1/M$ のときに収束することがわかる．よって n を含まない上界を得ることができた．

ついでながら，上に行なった評価は次のことを示している．すなわち，いたる所収束するベキ級数 $f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu$ については，x に任意の行列 A を代入して差支えがない．そうして新しい行列 $f(A)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu A^\nu$ が得られるのである．特に，行列 e^A は常に存在する．

上で得られた R あるいは T の級数表示が十分小さい $|\lambda|$ に対してのみ収束するのと対照的に，前節の公式 (15) を用いて導かれる逆形式 $R=(E-\lambda T)^{-1}$ あるいは逆行列の式は，ベキ級数の収束域外でも意味をもつ．すなわち，形式 $E-\lambda T$ を $A(u,x)$ と同一視する書き方によれば，逆形式 R に対しては

$$R(\mu,y;\,\lambda)=-\frac{\Delta(u,y;\,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

が，そうして解形式 T に対しては

$$\mathsf{T}(u,y;\,\lambda)=-\frac{\Delta(u,y;\,\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}-\frac{1}{\lambda}E(u,y)$$

が，すぐに得られる．ここで

$$\Delta(u,y;\lambda)=\begin{vmatrix}0 & u_1 & \cdots & u_n\\ y_1 & 1-\lambda t_{11} & \cdots & -\lambda t_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n & -\lambda t_{n1} & \cdots & 1-\lambda t_{nn}\end{vmatrix}$$

および

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda t_{11} & -\lambda t_{12} & \cdots & -\lambda t_{1n}\\ -\lambda t_{21} & 1-\lambda t_{22} & \cdots & -\lambda t_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\lambda t_{n1} & -\lambda t_{n2} & \cdots & 1-\lambda t_{nn}\end{vmatrix}$$

さて上の不等式を任意の ν について証明するために $\nu-1$ のときにはすでに証明できたとする．そうすると

$$\sum_{q=1}^{n}|t_{pq}^{(\nu)}|=\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}t_{p\alpha}^{(1)}t_{\alpha q}^{(\nu-1)}\right|\leqq\sum_{q=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left|t_{p\alpha}^{(1)}\right|\left|t_{\alpha q}^{(\nu-1)}\right|$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\left|t_{p\alpha}^{(1)}\right|\left(\sum_{q=1}^{n}\left|t_{\alpha q}^{(\nu-1)}\right|\right)\leqq M^{\nu-1}\cdot\sum_{\alpha=1}^{n}\left|t_{p\alpha}^{(1)}\right|\leqq M^{\nu}.$$

$\nu=1$ のとき不等式は成立するからすべての ν について証明できた．

であるが，これらは，それぞれ λ の $(n-1)$ 次，あるいは n 次の多項式である．よって多項式 $\Delta(\lambda)$ の零点は，上の形式 T の逆スペクトルと，すなわち形式 $E-\lambda T$ が逆をもたない λ の全体と一致する．

関係式

$$T+\lambda T^2+\lambda^2 T^3+\cdots=-\frac{\Delta(u,y;\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}-\frac{1}{\lambda}E(u,y)$$

によって，左辺のままではすべての λ に対して収束するわけではなく，その性質を見通すことも直接にはできない左辺の級数表示が，全 λ 平面に解析接続される．そうして解形式 T と同様に逆形式 R も λ の有理関数であり，その極は形式 T の逆スペクトルにほかならない．

行列式 $\Delta(u,y;\lambda)$ および $\Delta(\lambda)$ を行列式の定理により，λ のベキに展開すると，

$$\begin{aligned}\Delta(u,y;\lambda)=\ &\Delta_1(u,y)-\lambda\Delta_2(u,y)+\lambda^2\Delta_3(u,y)-\\&\cdots+(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\Delta_n(u,y),\\ \Delta(\lambda)=\ &1-\lambda\Delta_1+\lambda^2\Delta_2-\cdots+(-1)^n\lambda^n\Delta_n\end{aligned}$$

が得られる．ここで

$$\Delta_h(u,y)=\sum\begin{vmatrix}0 & u_{p_1} & \cdots & u_{p_h}\\ y_{p_1} & t_{p_1p_1} & \cdots & t_{p_1p_h}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{p_h} & t_{p_hp_1} & \cdots & t_{p_hp_h}\end{vmatrix}$$

および

$$\Delta_h=\sum\begin{vmatrix}t_{p_1p_1} & t_{p_1p_2} & \cdots & t_{p_1p_h}\\ t_{p_2p_1} & t_{p_2p_2} & \cdots & t_{p_2p_h}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{p_hp_1} & t_{p_hp_2} & \cdots & t_{p_hp_h}\end{vmatrix}$$

である．上における和は1から n までの自然数で $p_1<p_2<\cdots<p_h$ と順序づけられたすべての $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_h$ にわたってとる．

多くの場合において，パラメータ λ の代わりにその逆数 $\kappa=1/\lambda$ を導入す

る方が有利である．そのときは形式 $\kappa E - T$ を考察する方が目的にふさわしいが，その行列式

$$\begin{vmatrix} \kappa - t_{11} & -t_{12} & \cdots & -t_{1n} \\ -t_{21} & \kappa - t_{22} & \cdots & -t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t_{n1} & -t_{n2} & \cdots & \kappa - t_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(\kappa)$$

は κ の n 次の多項式であり，その零点 $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ は $\Delta(\lambda)$ の零点の逆数，すなわち，行列 T の固有値である．逆形式 $(\kappa E - T)^{-1}$ は $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ を除くすべての κ に対して存在し，十分大きな $|\kappa|$ に対してはノイマン展開

$$(\kappa E - T)^{-1} = \frac{E}{\kappa} + \frac{T}{\kappa^2} + \frac{T^2}{\kappa^3} + \cdots$$

で与えられる．この展開から注目すべき結果が導かれる．前に述べたことから上の左辺は $\varphi(\kappa)$ を分母とする κ の有理関数である．従って，$\varphi(\kappa)(\kappa E - T)^{-1}$ は κ について有理かつ整な形式であり，よってその κ による展開は κ の負ベキを含まない．ゆえに上式の右辺に $\varphi(\kappa) = \kappa^n + c_1\kappa^{n-1} + \cdots + c_n$ を掛けたとき，κ の負ベキの項の係数はすべて 0 である．すぐわかるように κ^{-1} の係数は，まさに $T^n + c_1T^{n-1} + \cdots c_nE$ であるので，ケーリー (Cayley) に由来する次の定理[7]に到達する：

《定理》 $\varphi(\kappa)$ が $\kappa E - T$ の行列式ならば，行列 T に対して等式

$$\varphi(T) = 0$$

が成り立つ．□

固有値 $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ からなるスペクトルに関して，もう 1 つの重要な事実が次の定理によって言い表わされる：

《定理》 $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ を行列 T の固有値とし，$g(x)$ を任意の多項式とする．そのとき行列 $g(T)$ の固有値は $g(\kappa_1), \ldots, g(\kappa_n)$ である．□

7 ［訳註］ケーリー–ハミルトン (Cayley–Hamilton) の定理と呼ばれることもある．

証明は，任意の T に対して成立する等式

$$|\kappa E - T| = \varphi(\kappa) = \prod_{\nu=1}^{n}(\kappa - \kappa_\nu)$$

から出発する．我われの目標の等式は

$$|\kappa E - g(T)| = \prod_{\nu=1}^{n}(\kappa - g(\kappa_\nu))$$

である．まず，任意の r 次の多項式 $h(x)$ を考え，その零点 $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ によって

$$h(x) = a\prod_{\varrho=1}^{r}(x - x_\varrho)$$

と表示されるとする．そうすると任意の行列 T に対して，恒等式

$$h(T) = a\prod_{\varrho=1}^{r}(T - x_\varrho E)$$

が成立する．両辺の行列式をとると

$$\begin{aligned}
|h(T)| &= a^n\prod_{\varrho=1}^{r}|T - x_\varrho E| = (-1)^{nr}a^n\prod_{\varrho=1}^{r}|x_\varrho E - T| \\
&= (-1)^{nr}a^n\prod_{\varrho=1}^{r}\varphi(x_\varrho) = (-1)^{nr}a^n\prod_{\varrho=1}^{r}\left(\prod_{\nu=1}^{n}(x_\varrho - \kappa_\nu)\right) \\
&= (-1)^{nr}(-1)^{nr}a^n\prod_{\nu=1}^{n}\left(\prod_{\varrho=1}^{r}(\kappa_\nu - x_\varrho)\right) = \prod_{\nu=1}^{n}h(\kappa_\nu).
\end{aligned}$$

ここで $h(T)$ として $\kappa E - g(T)$ をとれば，直ちに求める等式

$$|\kappa E - g(T)| = \prod_{\nu=1}^{n}(\kappa - g(\kappa_\nu))$$

が得られる．

1.3　2 次形式およびエルミート形式の主軸変換

代数学の特に重要な一章は，2 次形式 $K(x,x) = \sum\limits_{p,q=1}^{n} k_{pq}x_p x_q$ を

$$K(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\kappa_p y_p^2$$

の形の 2 次形式[8]，すなわち，変数が互いに分離された平方の和で表わされる形式（2 次形式の標準形）に変形する線形変換の理論である．なかでも，我われの関心を引くのは，上の変形を直交変換

$$x_p=\sum_{q=1}^{n}l_{pq}y_q=L_p(y)$$

によって遂行することである．この問題は幾何学，力学，振動理論においてしばしば現れるのであるが，**主軸問題**と呼ばれ，そこで求められる線形写像を**主軸変換**という．

1.3.1　最大値原理に基づく主軸変換

ここでまず，任意に与えられた 2 次形式 $K(x,x)$ の主軸変換が常に可能であることを確かめよう．それには次の基礎的な事実を用いる：有界な閉領域で定義された多変数の連続関数は，この領域において最大値をもつ（ワイエルシュトラス (Weierstraß) の定理）[9].

この定理により，成分 $l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1n}$ をもつ，次のような単位ベクトル $\mathbf{l}_1$ が存在する．すなわち，付加条件

$$\sum_{p=1}^{n}x_p^2=1 \tag{25}$$

---

8 ［訳註］わかりやすさと現代風の用語法を参考にして，この形を標準形と呼ぶ．

9 ［原註］主軸変換を正面から代数的に行なうことも難しくない．それは，$L'KL=D$ が対角要素 $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ をもつ対角行列になるような直交行列 L を求める問題である．$KL=LD$ から，変換の係数 l_{qi} に対する方程式

$$\sum_q k_{pq}l_{qi}=l_{pi}\kappa_i$$

が得られる．これからまず κ_i が後出の方程式 (30) の解として求められ，ついで，n^2 個の数 l_{qi} の直交系が簡単な代数的考察によって求められる．しかしながら上の本文で遂行された方法は，代数的な方法と比較して，我われが先に進むにつれて重要性を増す長所，すなわち，多くの超越的な問題にも通用するという長所をそなえているのである．

のもとでの $K(x,x)$ の最大値 κ_1 が，$x_1 = l_{11}, \ldots, x_n = l_{1n}$ において到達されるような $\mathbf{l}_1$ である．幾何学的にいえば，ベクトル $\mathbf{l}_1$ を位置ベクトルにもつ「単位球面」(25) 上の点は，同時に有心2次曲面の族「$K(x,x) = $ 一定」のうちの1つが単位球面に接する点にもなっている．

さらに $\mathbf{l}_1$ に直交し，成分 $l_{21}, \ldots, l_{2n}$ をもつ，次のような単位ベクトル $\mathbf{l}_2$ が存在する．すなわち $x_1 = l_{21}, \ldots, x_n = l_{2n}$ において $K(x,x)$ が (25) ともう1つの付加条件

$$\sum_{p=1}^{n} l_{1p} x_p = 0 \tag{26}$$

のもとでの $K(x,x)$ の最大値 κ_2 に達するというものである．明らかに，$\mathbf{l}_2$ は，$\mathbf{l}_1$ が全単位球面に対して解を与えたのと同様な問題を，単位球面と「平面」(26) との交わりに対して解いているのである．

さらに成分 $x_1 = l_{31}, \ldots, x_n = l_{3n}$ をもつ単位ベクトル $\mathbf{l}_3$ で，$\mathbf{l}_1$ と $\mathbf{l}_2$ の両方に直交し，かつ，このベクトルの終点において $K(x,x)$ が (25), (26) および

$$\sum_{p=1}^{n} l_{2p} x_p = 0 \tag{27}$$

という3つの付加条件のもとでの最大値 κ_3 に到達するものが存在する．この手順を続けることにより，n 個の互いに直交するベクトル $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_n$ が得られるが，これらは**主軸ベクトル**あるいは**固有ベクトル**と呼ばれる．その成分 l_{pq} は (21) により直交変換

$$x_p = \sum_{q=1}^{n} l_{qp} y_q \quad (p = 1, \ldots, n) \tag{28}$$

を定義する．実際 (28) が我われの求める解であることを示そう．

方程式 (28) を解けば

$$y_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} x_q \quad (p = 1, \ldots, n) \tag{29}$$

となるから，等式 $\mathbf{x} = \mathbf{l}_p$ は $y_p = 1$, $y_q = 0$（$q \neq p$ のとき）と同値である．特に最大値 κ_1 は $y_1 = 1$, $y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ のとき達せられる．これから，

変換された形式

$$C(y,y)=\sum_{p,q=1}^{n} c_{pq}y_p y_q = K(x,x)$$

において最初の係数は $c_{11}=\kappa_1$ となる．さらに

$$H(y,y)=\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq}y_p y_q = C(y,y)-\kappa_1(y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

は決して正の値をとらない．なぜなら，κ_1 が最大値であったからであり，$\sum_{p=1}^{n} x_p^2 = \sum_{p=1}^{n} y_p^2 = 1$ である限り，$H(y,y) \leqq 0$ である．一般の $y \neq 0$ の場合には y_i を $y_i/\sqrt{\sum y_p^2}$ でおきかえ，そのあとで全体に $\sum y_p^2$ を掛ければ，やはり $H(y,y) \leqq 0$ が得られる．さて y_1 はなお $H(y,y)$ に含まれていると，たとえば $h_{12}=h_{21}$ が0ではないとしよう．そうすると

$$y_1=1, \quad y_2=\varepsilon, \quad y_3=\cdots=y_n=0$$

に対して $H(y,y)$ の値は

$$2h_{12}\varepsilon+h_{22}\varepsilon^2=\varepsilon(2h_{12}+h_{22}\varepsilon)$$

となる．これは適当な ε をとれば正になってしまう．

こうして，変換した後の $K(x,x)$ の形が

$$C(y,y)=\kappa_1 y_1^2+C_1(y,y)$$

となることが示された．ここに $C_1(y,y)$ は $(n-1)$ 個の変数 $y_2, \ldots, y_n$ の2次形式である．付加条件 $y_1=0$ のもとでは，変換された形式 C は $C_1(y,y)$ に等しい．上と同様な論法により $C_1(y,y)$ が $\kappa_2 y_2^2+C_2(y,y)$ なる形をもち，$C_2(y,y)$ は $(n-2)$ 個の変数 $y_3, \ldots, y_n$ のみを含むことがわかる．以下同様である．

以上により，主軸変換

$$\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq}x_p x_q=\sum_{p=1}^{n}\kappa_p y_p^2, \quad \sum_{p=1}^{n} x_p^2=\sum_{p=1}^{n} y_p^2$$

の可能性が完全に証明された．なお上の証明を，対応する最小問題を基礎にとっ

て始めることもできる．すなわち付加条件 $E(x,x)=1$ のもとで $K(x,x)$ の最小値を問題にするのである．そうすれば大きさについての逆順で数 $\kappa_1,\dots,\kappa_n$ が得られる．さらに，$K(x,x)$ を一定に保って $E(x,x)$ の最大あるいは最小を求めることもできよう．そのときは，κ_i の逆数 λ_i が得られる．

1.3.2　特性値と固有値

§1.3.1 において逐次に最大値として定められた値 κ_i が p. 22 で導入された固有値[10]と一致することを示そう．

固有値 $\kappa_1,\dots,\kappa_n$ が満たす方程式

$$\varphi(\kappa)=(\kappa-\kappa_1)(\kappa-\kappa_2)\cdots(\kappa-\kappa_n)=0$$

を考えると，これは，

$$\begin{vmatrix} \kappa-\kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa-\kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa-\kappa_n \end{vmatrix}=0$$

と書くことができる．ところがこの行列式は，2次形式

$$\kappa\sum_{p=1}^{n}y_p^2-\sum_{p=1}^{n}\kappa_p y_p^2$$

の行列式に等しい．一方，この2次形式は，もとの2次形式

$$\kappa\sum_{p=1}^{n}x_p^2-K(x,x)$$

に直交変換をほどこして得られたのである．従って，κ について恒等的に

$$\begin{vmatrix} \kappa-\kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa-\kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa-\kappa_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \kappa-k_{11} & -k_{12} & \cdots & -k_{1n} \\ -k_{21} & \kappa-k_{22} & \cdots & -k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \cdots & \kappa-k_{nn} \end{vmatrix}$$

10　［訳註］用語法を現代風に改めた．

が成り立つ．従って，κ_i は κ に関する代数方程式

$$
(30)\qquad \begin{vmatrix} k_{11}-\kappa & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22}-\kappa & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn}-\kappa \end{vmatrix} = 0
$$

の解である．すなわち，逐次かつ最大値問題によって定めた κ_i は固有値にほかならない．

上の証明は次のことも示している：方程式 (30) は k_{pq} が $k_{pq} = k_{qp}$ なる条件を満たす任意の実数のとき，常に実根のみをもつ[11]．ついでに次の注意もつけ加えよう．固有値の絶対値の逆数，すなわち特性値の絶対値は有心 2 次曲面 $K(x,x) = 1$ の主軸の長さの平方である．さらに，少なくとも 1 つの固有値が 0 のとき，この形式を**縮退**しているといい，n より少ない変数の形式として表わすことができる．行列式の不変性（p. 16 参照）から，これは $\kappa = |k_{pq}| = \kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_n$ が 0 になるとき，またそのときに限る．$K(x,x)$ が正値形式（正の定符号形式）であるためには，$\kappa_p > 0\ (p = 1,\ldots,n)$ が必要かつ十分である．

形式 $K(x,x)$ の主軸表現

$$
K(x,x) = \sum_{p=1}^{n} \kappa_p y_p^2
$$

が与えられたならば，右辺の 2 次形式の反復形式をすぐにつくることができる．すなわち，積形式の直交変換について前に述べたことを考慮すれば，

$$
K^2(x,x) = \sum_{p=1}^{n} \kappa_p^2 y_p^2, \quad K^3(x,x) = \sum_{p=1}^{n} \kappa_p^3 y_p^2, \quad \cdots
$$

となる．これから h 回反復形式 $K^h(x,x)$ は，$K(x,x)$ の固有値あるいは特性値の h 乗をそれぞれ固有値あるいは特性値とすることがわかる．なおこのことは p. 23 の定理からもすぐに導かれる．h が偶数のとき，形式 $K^h(x,x)$ は正定値形式である．

---

[11]［原註］惑星の永年運動の問題にも現れるので方程式 (30) を永年方程式と呼ぶ習慣がある．これが，実根のみをもつことの直接的証明は，たとえば §3.4.2 における対応する考察を参照．

1.3.3　エルミート形式への一般化

エルミート形式に対しても主軸変換を全く同様に行なうことができる．行列 $H = \bar{H}'$ をもつエルミート形式

$$H(x, \bar{x}) = \sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q$$

は，ユニタリ変換 L：

$$x_p = \sum_{q=1}^{n} l_{qp} y_q$$

によって

$$H(x, \bar{x}) = \sum_{p=1}^{n} \kappa_p y_p \bar{y}_p = \sum_{p=1}^{n} \kappa_p |y_p|^2$$

の形に常に変換され得る．ここで係数 κ_p はすべて実である．これらの固有値 κ_m は，やはり付加条件

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad \sum_{p=1}^{n} l_{ip} \bar{x}_p = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m-1)$$

のもとでのエルミート形式 $H(x, \bar{x})$ の最大値になっている．

1.3.4　2 次形式の慣性則

標準形への変形の際に用いる線形変換に対して，直交性の条件をはずすとき，2 次形式は，分離された平方和の形の範囲で様々に変形される．たとえば，上の直交変換を行なったあとで，さらに変数ごとのスケール変換[12]，すなわち，各変数を定数倍する変換を行なっても同様な形式が再現される．特に，変換された形式での各変数の平方の前の（実）係数をすべて 1 または -1 にできる．これについて，**2 次形式の慣性則**と呼ばれる次の定理が成り立つ．

《定理》 2 次形式に，逆のある実変換を行なって各変数の平方の項のみを含む

12 ［訳註］原著では相似変換．

形に変形したとき，その正係数と負係数の個数は変換に無関係に一定である．
□

証明　上で触れたように，問題とする正係数と負係数の値をそれぞれ 1 および -1 に等しくできる．もし 2 次形式 $K(x, x)$ が 2 つの異なる実変換により，$y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_n^2$ および $z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - s_n^2$（ただし $r < s$）に写ったとする．すると，

$$y_1^2 + \cdots + y_r^2 + z_{s+1}^2 + \cdots + z_n^2 = y_{r+1}^2 + \cdots + y_n^2 + z_1^2 + \cdots + z_s^2$$

だから $y_1 = \cdots = y_r = z_{s+1} = \cdots = z_n = 0$ とおけば，残りのすべての y_i も 0 となる．上の条件を x についての連立方程式と考えると，方程式の数は n より少ないからこれを満足する $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{x}$ が確かに存在する．この $\mathbf{x}$ は n 個の同次方程式 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ の解でもあるが，こちらの連立方程式は行列式が 0 でないから，このような $\mathbf{x}$ を解にもち得ない．□

1.3.5　2 次形式の解形式を表わす式

2 次形式 $K(x, x)$ の解形式は，§1.3.2 に従って記号的な等式

$$\mathsf{K}(x, x; \lambda) = \frac{[E(x, x) - \lambda K(x, x)]^{-1} - E(x, x)}{\lambda}$$

で定義されるのであるが，上で述べた結果を利用すればこれを見やすい形に表わすことができる．

$K(x, x)$ が主軸変換により

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{y_p^2}{\lambda_p}$$

の形になったとする．$[E(x, x) - \lambda K(x, x)]^{-1}$ は変換により

$$\left[E(y, y) - \lambda \sum_{p=1}^{n} \frac{y_p^2}{\lambda_p}\right]^{-1}$$

に変形されるから，$\sum_{p=1}^{n} y_p^2/\lambda_p$ の解形式を求めれば，$K(x, x)$ の解形式が得られる．さて

$$\frac{1}{\lambda}\left[\left(\sum_{p=1}^{n} y_p^2 - \lambda \sum_{p=1}^{n} \frac{y_p^2}{\lambda_p}\right)^{-1} - E(y,y)\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\sum \frac{\lambda_p - \lambda}{\lambda_p} y_p^2\right)^{-1} - E(y,y)\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\sum \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} y_p^2 - E(y,y)\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\sum \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} y_p^2 - \sum y_p^2\right] = \sum_{p=1}^{n} \frac{y_p^2}{\lambda_p - \lambda}$$

が成り立つ．ここで，変換 x_p に戻れば，(19) の記号のもとに，$K(x,x)$ の解形式 $\mathsf{K}(x,x;\lambda)$ の表式

$$\mathsf{K}(x,x;\lambda) = \sum_{p=1}^{n} \frac{[L_p'(x)]^2}{\lambda_p - \lambda} \tag{31}$$

および双線形形式の表式

$$\mathsf{K}(u,x;\lambda) = \sum_{p=1}^{n} \frac{L_p'(u)L_p'(x)}{\lambda_p - \lambda} \tag{32}$$

が得られる．上の表式から，$p \neq q$ のとき $\lambda_p \neq \lambda_q$ と仮定すれば，λ の有理関数 $\mathsf{K}(u,x;\lambda)$ の $\lambda = \lambda_p$ における留数が $-L_p'(u)L_p'(x)$ に等しいことがわかる．

1.3.6　2次形式に伴なう連立1次方程式の解

最後に2次形式

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q$$

に伴なう連立方程式

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q = y_p \quad (p = 1, \ldots, n) \tag{33}$$

の解を固有ベクトルを用いて表わそう．

$K(x,x)$ を

$$\sum_{q=1}^{n} \kappa_q u_q^2$$

に写すような主軸変換

$$x_p = \sum_{q=1}^{n} l_{qp} u_q, \quad y_p = \sum_{q=1}^{n} l_{qp} v_q$$

を変数 x_i, y_i にほどこせば，上の方程式 (33) は

$$u_p - \lambda\kappa_p u_p = v_p \quad (p = 1, \ldots, n) \tag{34}$$

と書きかえられる．その解は

$$u_p = \frac{v_p}{1 - \lambda\kappa_p} = \frac{v_p}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda} v_p \tag{35}$$

と表わされる．もとの変数に戻れば，解はベクトル形

$$\mathbf{x} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{l}_p)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}} \mathbf{l}_p \tag{36}$$

で与えられる．これは解を形式 $K(x,x)$ の主軸ベクトル $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$ によって展開した形である．ただし (36) において $(\mathbf{y}, \mathbf{l}_p) = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} y_q$ である．

主軸ベクトル $\mathbf{l}_p$ 自身は同次方程式

$$x_q - \lambda_p \sum_{r=1}^{n} k_{qr} x_r = 0$$

あるいは

$$u_q - \lambda_p \kappa_q u_q = 0 \quad (q = 1, \ldots, n)$$

の正規化された解になっている．$q \neq p$ のとき，κ_q がすべての $\kappa_p = 1/\lambda_p$ と異なるなら，x_p に対して唯一の解

$$u_p = 1, \quad u_q = 0 \qquad (q \neq p)$$

あるいは

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}_p$$

が得られる．いくつかの固有値（あるいは特性値）が一致すれば，主軸ベクトルは一意的には定まらない．

1.4 固有値のミニ・マックス性

1.4.1 ミニ・マックス問題による固有値の特徴づけ

上で我われは，固有値を逐次に考察される最大値問題の解として導入した．

そこでは，各段階において前段までの解が当面の問題を解くのに用いられた．ここでは，固有値を（減少する）大きさの順に並べたときに h 番目となる固有値を，少々異なった問題の解として直接的に特徴づける方法を示そう．その方法においては，先行する段階の解に依存することはないのである．

さて，2次形式

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n}k_{pq}x_px_q$$

を，条件

$$\sum_{p=1}^{n}x_p^2=1 \tag{25}$$

に加えるに $(h-1)$ 個の条件

$$\sum_{p=1}^{n}\alpha_{\nu p}x_p=0 \quad (\nu=1,\ldots,h-1;\ h\leqq n) \tag{37}$$

を課す制約のもとに最大にする．ついでパラメータ $a_{\nu p}$ に依存するこの最大値を，$a_{\nu p}$ の値を変化させることにより最小にするのである．

主軸変換によって $K(x,x)$ は

$$\sum_{p=1}^{n}\kappa_p y_p^2 \quad (\kappa_1\geqq\cdots\geqq\kappa_n)$$

に変形され，条件 (25) は

$$\sum_{p=1}^{n}y_p^2=1 \tag{38}$$

に，また条件 (37) は

$$\sum_{p=1}^{n}\beta_{\nu p}y_p=0 \tag{39}$$

と書きかえられる．ここで $\beta_{\nu p}$ は新しいパラメータである．

$$y_{h+1}=\cdots=y_n=0$$

とすれば，任意の $\beta_{\nu p}$ に対して，(39) は h 個の未知数 $y_1,\ldots,y_h$ について

の $(h-1)$ 個の同次方程式であるから，これらは確かに 0 でない解を，従って (38) を満足する解をもつ．この解に対しては，

$$K(x,x)=\kappa_1 y_1^2+\cdots+\kappa_h y_h^2 \geqq \kappa_h(y_1^2+\cdots+y_n^2)=\kappa_h$$

となる．最初の段階での最大値は，どのような $\beta_{\nu p}$ に対しても κ_h より小さくならない．他方，条件 (37) として，方程式

$$y_1=\cdots=y_{h-1}=0$$

をとれば，そのときの最大値はちょうど κ_h に等しい．こうして，次の結果が得られた．

《ミニ・マックスの原理》[13] 2 次形式 $K(x,x)$ の h 番目の固有値 κ_h は，条件

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^2=1$$

および，x_p 間に関する任意の $(h-1)$ 個の線形同次な等式による付加条件のもとで，$K(x,x)$ の最大値 (maximum) がとり得る最小値 (minimum) である．□

1.4.2　応用

上の**固有値のミニ・マックス性**に基づけば，特に，j 個の線形独立な**束縛条件**

$$\sum_{p=1}^{n}\gamma_{sp}x_p=0 \quad (s=1,\ldots,j) \tag{40}$$

が課せられたとき，従って $K(x,x)$ が $(n-j)$ 個の独立変数の 2 次形式 $\tilde{K}(x,x)$ に帰着させられているとき，その固有値がどのように変化するかを容易に見通すことができる．h 番目の固有値 $\tilde{\kappa}_h$ は κ_h と同じくミニ・マックス問題から定まるが，この $\tilde{\kappa}_h$ に対しては，条件 (40) によって $x_1,\ldots,x_n$ の許される値がせばめられている．ゆえに $\tilde{K}(x,x)$ の最大値は，従ってまた，各固有

13 ［訳註］英語では mini-max principle.

値も，対応する $K(x,x)$ における値を超えない．

さらに，κ_{h+j} は $K(x,x)$ が (25) のほかに x_p に対する $(h+j-1)$ 個の線形同次な条件のもとでとり得る最大値の最小値である．従って，そのような条件のうち j 個を特定の (40) にとった場合を考えることによって，κ_{h+j} が $\tilde{\kappa}_h$ より大きくないことがわかる．

ゆえに，$\kappa_h \geqq \tilde{\kappa}_h \geqq \kappa_{h+j}$ である．別のいい方では次のようになる．

《定理》 n 個の変数の 2 次形式 $K(x,x)$ が j 個の線形同次な条件によって $(n-j)$ 個の変数の 2 次形式 $\tilde{K}(x,x)$ に帰着されたとすると，$\tilde{K}(x,x)$ の固有値 $\tilde{\kappa}_1, \ldots, \tilde{\kappa}_{n-j}$ はそれぞれ，対応する $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-j}$ より大きくなく，また，$\kappa_{j+1}, \ldots, \kappa_n$ より小さくない[14]．□

特に $j=1$ の場合を考え，拘束条件として $x_n=0$ をとれば，2 次形式 K はその $(n-1)$ 次の**切片形式**となり，次の定理が得られる．

《定理》 $(n-1)$ 次の切片形式の h 番目の固有値は，大きくても，もとの形式の h 番目の固有値以下であり，また小さくても $(h+1)$ 番目の固有値以上である．□

この定理を，2 次形式の $(n-1)$ 次の切片形式に適用すると，$(n-2)$ 次の切片形式の固有値に関して対応する結果が得られる．以下同様．一般に 2 次形式の連続した 2 つの切片形式の固有値は，上で述べた具合に互いに他を分離する．

さらに次のこともいえる：

《定理》 $K(x,x)$ に任意の非負値形式を加えて得られる和形式の固有値は，$K(x,x)$ の対応する固有値より小さくない．□

固有値を特徴づけるとき，ミニ・マックス問題の代わりに，**マックス・ミニ問題**を出発点にすることもできる．そのときは，同じ κ_h が順序を逆にして得られる．

---

14 ［原註］ここに展開された考察の納得には，次の注意が役立つであろう：3 軸をもつ楕円体を，中心を通る平面で切った切口の楕円は，楕円体の最大軸と中間軸との間の長さの長軸をもち，また中間軸と最小軸との間の長さの短軸をもつ．

エルミート形式の固有値のミニ・マックス性を定理の形に述べ，かつ，証明することは，読者にまかせよう．

1.5　第 1 章への補足と問題

1.5.1　線形独立性とグラムの行列式

与えられた m 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ が線形従属であるかどうかの疑問は，次のようにすれば，成分の行列の階数を陽に求める必要がある通常の方法によらずに，非常に簡単な形式的な方法で決定される：2 次形式

$$G(x,x) = (x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_m\mathbf{v}_m)^2 = \sum_{i,k=1}^{m} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k)x_i x_k$$

を考察しよう．明らかに $G(x,x) \geqq 0$ であり，ベクトル $\mathbf{v}_i$ は条件

$$(25') \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = 1$$

を満たし，また $G(x,x) = 0$ を成り立たせるような $x_1, \ldots, x_m$ が存在するとき，かつそのときに限り線形従属である．従って線形従属であるならば，形式 $G(x,x)$ の付加条件 (25′) のもとでの最小値は 0 でなければならない．ところがこの最小値は 2 次形式 $G(x,x)$ の最小の固有値，すなわち方程式

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1^2 - \kappa & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & \cdots & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_m) \\ (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathbf{v}_2^2 - \kappa & \cdots & (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_2) & \cdots & \mathbf{v}_m^2 - \kappa \end{vmatrix} = 0$$

の最小の解である．

このことは次の定理を意味している．

《定理》 ベクトル $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ が線形従属であるための必要十分条件は,「グラムの行列式」

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1^2 & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) & \cdots & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_m) \\ (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathbf{v}_2^2 & \cdots & (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_2) & \cdots & \mathbf{v}_m^2 \end{vmatrix} \tag{42}$$

が0になることである．□

方程式(41)は，$G(x,x)$ のすべての固有値 $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$（これらは非負である）によって満たされるのであるが，その左辺を κ のベキに，従って多項式に展開すれば，定係数は Γ となり，κ^m の係数は $(-1)^m$ である．よく知られている代数学の定理によれば

$$\Gamma = \kappa_1 \cdots \kappa_m \tag{43}$$

が成り立つ．

これより，**任意の m 個のベクトル系に対するグラム(Gram)の行列式は決して負にならない**．不等式

$$\Gamma = |(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k)| \geqq 0 \quad (i, k = 1, \ldots, m) \tag{44}$$

において等号が成り立つのは $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ が線形従属のときだけである．なお上の不等式は，シュヴァルツの不等式（p.2参照）

$$\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2 - (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1^2 & (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \\ (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) & \mathbf{v}_2^2 \end{vmatrix} \geqq 0$$

の拡張になっている．

グラムの行列式の値または形式 $G(x,x)$ の固有値の最小値 κ_m はベクトル $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ の**線形独立の尺度**を表わすものである．この値が小さいほど $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ が（稜線として）張る m 次元の領域は「平たく」なる．もしこの**線形独立性の尺度**が0ならば，上の領域は高々 $(m-1)$ 次元の領域に「ひしゃげて」しまう．さらにグラムの行列式は，簡単な幾何学的意味ももっている．すなわち，その値は m 個のベクトル $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ が張る m 次元領域の体積の $m!$ 倍の体積の平方に等しい．たとえば，$m=2$ のときグラムの行列式は，$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ がつくる三角形の面積の2倍の平方である．

当然ながら，線形従属についてのグラムの判定条件は，普通の判定条件と

同値である．ここでいう普通の判定条件とは，ベクトルの成分を並べた長方形の表

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

から m 列を取り出してつくった任意の正方行列の行列式がすべて 0 になるとき，そのときに限り，ベクトルは線形従属であると主張するものである．実際，よく知られた行列式の定理によれば

$$\Gamma = \sum \begin{vmatrix} v_{1s_1} & v_{1s_2} & \cdots & v_{1s_m} \\ v_{2s_1} & v_{2s_2} & \cdots & v_{2s_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{ms_1} & v_{ms_2} & \cdots & v_{ms_m} \end{vmatrix}^2 \tag{45}$$

が成り立つからである．ここで和は，$s_1 < s_2 < \cdots < s_m$ と順序づけられた，1 から n までの正数の組 $s_1, \ldots, s_m$ の全体にわたってとる．

1.5.2　行列式に対するアダマールの不等式

《定理》 実成分 a_{ik} の行列式

$$A = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

に対して，次の評価が成り立つ：

$$A^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2. \tag{46}$$

□

証明　行に沿っての平方和

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = c_i^2 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

のそれぞれを一定に保つという条件のもとで，a_{ik} を変化させてみよう．そうして，これらの n 個の条件のもとでの，a_{ik} の関数 A^2 の最大値を $A_{\max}$ とする．この最大値が，ある行列式 $A_{\max}$ によって到達されることは p. 25 のワイエルシュトラスの定理からわかる．このとき，$A_{\max}$ のどの行についても，その成分の連比は，対応する余因数の連比に等しい．なぜなら，h を任意に固定したとき

$$A = a_{h1}A_{h1} + \cdots + a_{hn}A_{hn}$$

であり，p. 2 のシュヴァルツの不等式を用いれば

$$A^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} a_{hk}^2 \sum_{k=1}^{n} A_{hk}^2 = c_h^2 \sum_{k=1}^{n} A_{hk}^2$$

となるからである．

ここでもし a_{hk} が A_{hk} に比例していないならば，A^2 が最大値になっていないことは確かである．なぜなら，そのときには上式において不等号の場合となり，一方では，c_h^2 および A_{hk} を一定にしたまま n 個の数 a_{hk} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ を適当にとれば，(シュヴァルツの不等式で等号が成立する場合となり）上の行列式の平方が右辺に等しくなるようにできるからである．

さて，$A_{\max}$ とそれ自身の積をつくると，行列式の積に関する定理により，

$$A_{\max}^2 = \prod_{i=1}^{n} c_i^2$$

が得られる．異なる行の内積は，上に証明した比例関係により，行列式の初等的定理により 0 となるからである．ゆえに，もとの行列式 A に対して目標の不等式

$$A^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} c_i^2 = \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

が成り立つのである．□

行列式に対するアダマール (Hadamard) の不等式の幾何学的意味は簡明である．すなわち，それは与えられた長さをもつ n 個のベクトルが n 次元空間の中で張る多面体の体積は，それらのベクトルが互いに直交するとき最大に

なるということである.

アダマールの不等式は a_{ik} を複素数としたときも，不等式における A および a_{ik} をその絶対値でおきかえて成り立つ.

1.5.3　2 つの 2 次形式の標準形への同時変換

主軸変換は，より一般な次の問題，すなわち，与えられた 2 つの 2 次形式

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq}x_px_q,\quad H(x,x)=\sum_{p,q}^{n} h_{pq}x_px_q$$

（ただしその一方は，たとえば $H(x,x)$ は正値 2 次形式とする）を 1 つの線形変換

$$x_p=\sum_{q=1}^{n} l_{pq}y_q\quad (p=1,\ldots,n)$$

により同時に平方項のみからなる形式（標準形）

$$K(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\kappa_p y_p^2,\quad H(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\eta_p y_p^2$$

に変換する問題の特別な場合である．この一般の問題を，主軸変換に帰着させて扱うことも可能であるが，同様な論法で改めて直接取り扱うのが簡単である.

さらに，ここで正値形式 H の係数 η_p を 1 にすることができる．商 $\frac{\kappa_p}{\eta_p}=\rho_p$ および数 $\frac{1}{\rho_p}=\lambda_p$ を，それぞれ形式 $K(x,x)$ の $H(x,x)$ に相対的な固有値および特性値という.

変換の理論を直接に遂行すること，そうして以下の固有値のミニ・マックス性などを証明することが可能である.

《定理》 固有値を $\rho_1 \geqq \rho_2 \geqq \cdots \geqq \rho_n$ とすれば，ρ_h は付加条件

$$\sum_{p=1}^{n}\alpha_{\nu p}x_p=0\qquad(\nu=1,\ldots,h-1)$$

のもとでとり得る $K(x,x)/H(x,x)$ の最大値の，さらにパラメータ $\alpha_{\nu p}$ を変化させたときの最小値である．□

目標とする同時変換を求めるために，まず付加条件 $H(x,x)=1$ のもとでの $K(x,x)/H(x,x)$ の最大値を求める．いま最大になるのが $x_p = l_{1p}$ $(p=1,\ldots,n)$ のときだとする．ついで，付加条件

$$\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} l_{1p} x_q = 0$$

を追加して第 2 の固有値を求めるのである．以下同様．なお，固有値 ρ_p は方程式

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\varrho h_{11} & k_{12}-\varrho h_{12} & \cdots & k_{1n}-\varrho h_{1n} \\ k_{21}-\varrho h_{21} & k_{22}-\varrho h_{22} & \cdots & k_{2n}-\varrho h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}-\varrho h_{n1} & k_{n2}-\varrho h_{n2} & \cdots & k_{nn}-\varrho h_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

の解でもある．

上の方程式は，同次連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{n} (k_{ij} - \varrho h_{ij}) x_j = 0$$

が解ける（0 でない解をもつ）ための条件でもある．おのおのの固有値に対する上の連立方程式の互いに直交する[15]解 x_j は，適当に正規化すれば，**固有ベクトル**の成分を与え，従って，求める同時変換の係数を与える．

1.5.4　無限多変数の双線形形式と 2 次形式

ここまでの理論は，独立変数を無限に増やしても，次のような条件を設ければそのまま成り立つ．すなわち，双線形形式，または 2 次形式の係数について，たとえば，その平方の和が収束するという条件，さらに，すべての独立変数の平方の和が収束するという条件である．これらの無限多変数の形式の理論は，ヒルベルトによって展開されたものであるが，解析学の多くの問題に直接的に応用される．しかもこれらの問題においては，直接的かつ代数

15　［訳註］$H(x,x)$ を内積として直交する．

的なベクトルあるいはテンソル計算に対応するやり方で進むことより，一層速やかに目標に到達し得るのである．

1.5.5　無限小線形変換

無限小線形変換とは，その行列が

$$A = E + (\varepsilon\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\alpha_{11} & \varepsilon\alpha_{12} & \cdots & \varepsilon\alpha_{1n} \\ \varepsilon\alpha_{21} & 1+\varepsilon\alpha_{22} & \cdots & \varepsilon\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon\alpha_{n1} & \varepsilon\alpha_{n2} & \cdots & 1+\varepsilon\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

で与えられ，そこでの ε が 1 次の無限小であるものである．いうなれば，ε の高次のベキが当面の考察においては省略できるとみなすのである．このような 2 つの無限小変換の行列を $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$, $B = E + (\varepsilon\beta_{ik})$ とするとき，その無限小変換としての積は，行列 $C = AB = E + (\varepsilon\alpha_{ik} + \varepsilon\beta_{ik})$ をもつ．これより**無限小線形変換は可換である**．

さらに次の事実が成り立つ：

《定理》行列 $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$ の逆行列は $A^{-1} = E - (\varepsilon\alpha_{ik})$ であり，行列 $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$ の行列式は

$$1 + \varepsilon(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn})$$

に等しい．□

無限小変換が直交変換であるとすれば，A' を A の転置行列として $A'A = E$ であるゆえ，関係 $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$ が成り立つ．すなわち：

《定理》無限小変換が直交であるための必要十分条件は，それと E との差の行列が交代行列になることである．□

一般の無限小変換 $C = E + (\varepsilon\gamma_{ik})$ は，

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} - \gamma_{ki}),$$
$$\beta_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki})$$

とおけば，直交変換 $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$ と，対称変換 $B = E + (\varepsilon\beta_{ik})$ の積で表わされる．

無限小変換に限らないが，行列 $S = (s_{ik})$ で表わされる，一般の対称変換 $y_i = \sum_k s_{ik}x_k$ は，幾何学的には互いに直交する n 個の方向それぞれにおける伸縮[16]（膨張あるいは縮小）を表わす．実際，2次形式 $S(x,x)$ の主軸変換に応じて，変数 x_i, y_i に代わる新しい変数 u_i および v_i を導入し，

$$\sum_{i,k=1}^{n} s_{ik}x_ix_k = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i u_i^2$$

が成り立つようにすれば，変換式は

$$v_i = \kappa_i u_i$$

となる．これは主軸の各方向に沿っての「不均等」な伸縮を解析的に表現したものである[17]．変換前の体積に対する体積増加の比である「体膨張率」は，明らかに $\kappa_1\cdots\kappa_n - 1$ で与えられるが，これは $|s_{ik}| - 1$ とも書ける．特に変換が無限小で，$(s_{ik}) = E + (\varepsilon\beta_{ik})$ であるならば

$$\kappa_1\cdots\kappa_n - 1 = \varepsilon(\beta_{11} + \cdots + \beta_{nn})$$

が成り立つ．

直交変換は回転を表わすから，以上をまとめて次のように述べることができる：

《定理》 行列 $E + (\varepsilon\gamma_{ik})$ なる無限小変換は，回転と伸縮との積として表わされる．その体膨張率は $\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ii}$ に等しい．□

1.5.6　摂動系

微小振動の理論においては，2次形式 $K(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_ix_k$ の固有値や固有ベクトルが，単位形式 $E(x,x)$ および $K(x,x)$ の変化に際してどのよう

16 ［訳註］原語は膨張 (Dilatation).

17 ［訳註］$\kappa_i < 0$ のときは,「向きを変えての伸縮」となる．以下は必要に応じてこのような解釈で読み取って欲しい.

に変化（摂動）するのかを明らかにする問題が重要である．すなわち，形式 $E(x,x)+\varepsilon\mathsf{A}(x,x)$ および $K(x,x)+\varepsilon\mathsf{B}(x,x)$ とを同時に標準形に変換する問題である（§1.5.3 参照）．ここで

$$\mathsf{A}(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}x_ix_k,\quad \mathsf{B}(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n}\beta_{ik}x_ix_k$$

であり，ε はパラメータを表わす．

さて，変動する系（摂動を受けた系）を表わすのに

$$K(x,x)+\varepsilon\mathsf{B}(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n}b'_{ik}x_ix_k,\quad E(x,x)+\varepsilon\mathsf{A}(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a'_{ik}x_ix_k$$

とおくと，固有ベクトルの成分を決定する方程式は（p. 42 参照）

$$\sum_{k=1}^{n}(b'_{ik}-\varrho' a'_{ik})x'_k=0\quad (i=1,\ldots,n)$$

となる．ここで,（新しい系の固有値）ϱ' 自身は，上の方程式の係数行列式が 0 となる条件から定まるが，それらは n 個の実数である．もとの $K(x,x)$ の固有値はすべて異なっていると仮定して，それらを $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_n$ で表わす，その一方で，変動する系の固有値を $\varrho'_1,\varrho'_2,\ldots,\varrho'_n$ とおく．最初から $K(x,x)$ は次の平方の和であると仮定してよい：

$$K(x,x)=\varrho_1x_1^2+\varrho_2x_2^2+\cdots+\varrho_nx_n^2.$$

（十分小さな ε に対しては）ρ'_i は代数方程式の単根であるから，$\varepsilon=0$ の近傍で ε の 1 価解析関数である．また変動する系の固有値 ϱ'_h に属する固有ベクトルの成分 x'_{hk} についても同様にとれる．ゆえに ϱ'_i および x'_{hk} を ε のベキ級数の形におくことができ，それぞれ定数項は ϱ_i およびもとの固有ベクトルの成分 x_{hk} にそれぞれ等しい．

さらに，$\varepsilon,\varepsilon^2,\ldots$ の係数を逐次に計算するには，これらのベキ級数を方程式

$$\sum_{k=1}^{n}(b'_{ik}-\varrho'_h a'_{ik})x'_{hk}=0\quad (i,h=1,2,\ldots,n)$$

に代入し，かつ $b'_{ik}=\delta_{ik}+\varepsilon\beta_{ik}$, $a'_{ik}=e_{ik}+\varepsilon\alpha_{ik}$ とおかねばならない．た

だし $\delta_{ii}=\rho_i$, $\delta_{ik}=0$ $(i \neq k)$, $e_{ii}=1$, $e_{ik}=0$ $(i \neq k)$ である．こうして得られた方程式において ε のベキに従う整頓を行ない，各ベキの係数を 0 とおくことによって，無限個の新しい方程式が得られる．

この方法と全く同値でありながら，多少とも便利さにおいて優るのは，ε を無限小としての，(無限小の）オーダーの考察である．すなわち，上で述べた方程式の中で，$i=h$ に対するものを考察すれば，ε についての 2 次以上の項を 0 とみなしてしまうので，次式が得られる：

$$\varrho_h' = \frac{\varrho_h + \varepsilon\beta_{hh}}{1+\varepsilon\alpha_{hh}} = \varrho_h - \varepsilon\varrho_h\alpha_{hh} + \varepsilon\beta_{hh}.$$

さらに，$i \neq h$ に対する方程式を考察すれば，含まれる項のうち 2 項を除けば他の項は 2 位の無限小である．よって $\sum x_i^2 = 1$ から

$$x_{hh}' = 1, \quad x_{hi}' = -\varepsilon\frac{\alpha_{ih}\varrho_h - \beta_{ih}}{\varrho_h - \varrho_i}$$

が得られ，これは ε についての 2 位の無限小である．

固有ベクトルの成分に対するこれらの値を用いれば，固有値を，ε の 3 次以上を無視する精度で容易に計算できる．再び，h 番目の固有ベクトルの成分に対する方程式のうちの $i=h$ のもの（h 番目のもの）

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{hk}' - \varrho_h'\alpha_{hk}')x_{hk}' = 0$$

を考える．上の左辺で ε についての 3 次の量を省略し，$k=h$ であるような項を分離すれば，

$$\begin{aligned} b_{hh}' - \varrho_h'\alpha_{hh}' &= {\sum_k}' \varepsilon(b_{hk}' - \varrho_h'\alpha_{hk}')\frac{\alpha_{kh}\varrho_h - \beta_{kh}}{\varrho_h - \varrho_k} \\ &= -\varepsilon^2{\sum_k}'\frac{(\alpha_{kh}\varrho_h - \beta_{kh})^2}{\varrho_h - \varrho_k} \end{aligned}$$

が得られ，ϱ_h' に対しては

$$\varrho_h' = \varrho_h - \varepsilon\varrho_h\alpha_{hh} + \varepsilon\beta_{hh} - \varepsilon^2\alpha_{hh}(\beta_{hh} - \varrho_h\alpha_{hh}) + \varepsilon^2{\sum_k}'\frac{(\alpha_{kh}\varrho_h - \beta_{kh})^2}{\varrho_h - \varrho_k}$$

となる．上において和の記号における $'$ は，1 から n までの k のうち $k=h$ を除いたすべての k について加えることを意味している．

1.5.7　拘束条件

2 次形式 $K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq}x_px_q$ に対して，拘束条件

$$\gamma_1 x_1+\cdots+\gamma_n x_n=0$$

を課すこと，およびそれによってもたらされる変数の減少を，t を正のパラメータとして含む 2 次形式 $K(x,x)+t(\gamma_1x_1+\cdots+\gamma_nx_n)^2$ を導入することにより，連続的な変化によってもたらされる結果であると考えることができる．実際，t が無限に増大すると，その 2 次形式の固有値はすべて単調に増大する．特に最大の固有値は無限に増大するが，他の固有値は関係 $\gamma_1x_1+\cdots+\gamma_nx_n=0$ を用いて $K(x,x)$ から 1 つの変数を消去して得られる 2 次形式の固有値に収束するのである．

1.5.8　行列または双線形形式の単因子

$\mathfrak{A}$ をテンソル，$A=(a_{ik})$ をその行列とする．そのとき多項式

$$|\kappa E-A|=\begin{vmatrix}\kappa-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \kappa-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \kappa-a_{nn}\end{vmatrix}$$

は，ここでは詳述を割愛する定理によって「単因子」

$$(\kappa-r_1)^{e_1},\ (\kappa-r_2)^{e_2},\ \ldots,\ (\kappa-r_h)^{e_h}$$

の積に分解される．ここで $r_1,r_2,\ldots,r_h$ の中には等しいものもあり得る．それぞれの単因子 $(\kappa-r_\nu)^{e_\nu}$ には，次を満たす e_ν 個のベクトル $\mathbf{f}_1^{(\nu)}$, $\mathbf{f}_2^{(\nu)}$, …, $\mathbf{f}_{e_\nu}^{(\nu)}$ が属する：

$$\mathfrak{A}\mathbf{f}_1^{(\nu)}=r_\nu\mathbf{f}_1^{(1)},\ \mathfrak{A}\mathbf{f}_2^{(\nu)}=r_\nu\mathbf{f}_2^{(\nu)}+\mathbf{f}_1^{(\nu)},\ \ldots,\ \mathfrak{A}\mathbf{f}_{e_\nu}^{(\nu)}=r_\nu\mathbf{f}_{e_\nu}^{(\nu)}+\mathbf{f}_{e_\nu-1}^{(\nu)}.$$

ここに n 個のベクトル

$$\mathbf{f}_1^{(1)},\ldots,\mathbf{f}_{e_1}^{(1)},\quad \mathbf{f}_1^{(2)},\ldots,\mathbf{f}_{e_2}^{(2)},\quad \mathbf{f}_1^{(h)},\ldots,\mathbf{f}_{e_h}^{(h)}$$

は線形独立である．それに応じる変数 $x_1^{(1)}, \cdots, x_{e_h}^{(h)}$ を導入[18]すれば，A は

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_h \end{pmatrix}$$

と表わされる行列[19]に変換される．ここで，$A_1, \ldots, A_h$ はまた行列であり，A_ν は次の形の e_ν 次の行列である：

$$A_\nu = \begin{pmatrix} r_\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & r_\nu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_\nu & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & r_\nu \end{pmatrix}.$$

1.5.9　ユニタリ行列のスペクトル

ユニタリ行列のスペクトルは（複素平面における）単位円周上にあることを示そう．

これを証明するために，ユニタリ行列の成分は絶対値において高々1に等しいこと，従って，n 次のユニタリ行列の固有方程式の係数の絶対値は，n にはよっても個々の行列には無関係なある上界以下になっていることに注意しよう．特に固有方程式の最初と最後の係数は，その絶対値が1であるから，固有値の絶対値は行列とは無関係な正の上界および下界をもっている．他方，ユニタリ行列 A のすべてのベキ A^m もユニタリ行列で，その固有値は A の固有値の m 乗である．これらのベキとその逆数とが m に無関係な限界以下に止まっていることができるのは，すべての固有値 λ_i の絶対値が1に等しいときだけである．

無限行列にも適用する別証明が，$(E - \lambda A)^{-1}$ に対するノイマン級数の収

---

18 ［訳註］上の e_ν 個の $\mathbf{f}_1^{(\nu)}, \ldots, \mathbf{f}_{e_\nu}^{(\nu)}$ を基底に採用することに相当する．

19 ［訳註］いわゆるジョルダン (Jordan) の標準形である．

束性を調べることから得られる.

まず，級数

$$(E-\lambda A)^{-1}=E+\lambda A+\lambda^2A^2+\lambda^3A^3+\cdots$$

は，$|\lambda|<1$ である限り，ユニタリ行列 A に対して収束する．なぜなら，行列 A^m の成分は，すべて絶対値において高々1 であるから，右辺の行列級数の各成分に対する優級数として，幾何級数をとり得るからである．よって，$|E-\lambda A|$ の零点は単位円の内部にはあり得ない．他方，$A\bar{A}'=E$ により

$$(E-\lambda A)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\bar{A}'\left(E+\frac{1}{\lambda}\bar{A}'+\frac{1}{\lambda^2}\bar{A}'^2+\cdots\right)$$

が成り立ち，右辺の幾何級数は，$\bar{A}'$ がまたユニタリ行列であるので，$1/|\lambda|<1$ に対して収束する．よって $|E-\lambda A|$ の零点は単位円の外部にもない．ゆえに，零点は我われの主張通りに単位円周上にある.

第2章　任意関数の級数展開問題

前章で導かれた関係の多くは，n 次元空間のベクトルの代わりに一定の**基本領域** G 内で定義された1変数または多変数の関数を考察の対象としたときも，極めて類似な形で成り立つ．たとえば，n 次元空間内のどのベクトルも，n 個の独立なベクトルからなる任意の系の線形結合として表わされるという事実にちょうど平行的な問題は，基本領域 G 内の（多かれ少なかれ）任意の関数を，前もって与えられている関数系の線形結合で表わすことである（この前もって与えられた関数系は，以下でわかるように無限集合でなければならない）．これが，**任意の関数を与えられた関数系によって級数に展開するという問題**である．本章では数理物理の分野に極めていろいろな形で現れるこの問題を一般的な見地から取り扱う．

ここでは我われは考察を，(基本的には) **区分的に連続**な関数に限る．すなわち，基本領域 G が有限個の部分領域に分かれ，考察する関数は，おのおの部分領域の内部で連続で，しかも各部分領域の内部からその境界に任意に近づいていくとき定まった有限の境界値をもつものに限る．記述の都合上，我われはまず1変数 x だけの関数を取り扱うこととし，さらにその基本領域 G は x 軸の有限区間とする．多変数，たとえば2変数 x, y の関数を取り扱うときには，基本領域は有限個の曲線弧で囲まれ，それぞれの曲線弧の接線は連続的に変わるものと仮定する[1]．もし基本領域に境界点をつけ加えて考えるときは，(前後関係から明らかな場合は別だが)「閉領域」ということにする．

さらに，考えている関数が**区分的に滑らか**であると仮定することが少なく

[1] ［訳註］すなわち，基本領域の境界は区分的に滑らかである．

ない．すなわち，関数自身およびその1次導関数が区分的に連続であるという仮定である．また特にことわらない限り，取り扱う関数は実数値をとるものとする．

2.1　直交関数系

2.1.1　定義

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積 (f,g) または (fg) を[2]，有限の基本領域 G にわたってとった積分[3]

$$(f,g)=\int fg\,dx \tag{1}$$

によって定義する．**シュヴァルツの不等式**

$$(f,g)^2 \leqq (f,f)(g,g) \tag{2}$$

が成り立つことは，ベクトルの場合と同じように，λ についての2次関数 $\int(f+\lambda g)^2\,dx$ の正値性，あるいは直接に，恒等式

$$(f,g)^2=(f,f)(g,g)-\frac{1}{2}\iint(f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x))^2\,dx\,d\xi$$

から導くことができる．(2) の中の等号は f と g が比例するとき，そのときに限り成り立つ．2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ は，内積が0となるとき，すなわち $(f,g)=0$ となるとき**直交**するという．1つの関数 $f(x)$ のそれ自身との内積をその関数の**ノルム平方**といって

$$Nf=(f,f)=\int f^2\,dx \tag{3}$$

で表わす[4]．ノルム平方が1の関数は**正規化されている**という．正規化された

---

[2] ［訳註］現在は (fg) なる記法は一般に使われない．本書だけの略記法と心得て欲しい．

[3] ［原註］以後，誤解のない限り，積分範囲は省略する．

[4] ［訳註］原著では N を f のノルムと呼んでいるが，現在の用語法では $\sqrt{N}=\sqrt{(f,f)}$ が f のノルムである．読者の誤解を避けるために，訳書では N をノルム平方と訳出することにした．

関数の系 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... で，どの 2 つの異なる関数も互いに直交しているような系を**正規直交系**という．その特徴を示す条件

$$(\varphi_\nu, \varphi_\mu) = e_{\nu\mu} \quad (e_{\nu\nu} = 1,\ \mu \neq \nu \text{ のとき } e_{\nu\mu} = 0)$$

を**直交条件**という．

区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$，あるいはもっと一般に長さ 2π の任意の区間における正規直交関数系の一例は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots,\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots$$

である．

複素数値をとる実変数の関数についても直交関係を拡張しておこう．2 つの複素数値関数 $f(x)$, $g(x)$ は

$$(f, \bar{g}) = (\bar{f}, g) = 0$$

が成り立つとき直交であるという．ここで $\bar{f}$, $\bar{g}$ はそれぞれ f, g に複素共役な関数である．関数 $f(x)$ は $Nf = \int |f|^2 dx = 1$ のとき**正規化されている**という．複素直交系の最も簡単な例は，区間 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における指数関数で示せば

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}},\ \ldots$$

の系で，その**直交関係**

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\mu-\nu)x}\,dx = e_{\mu\nu} \quad (e_{\nu\nu} = 1,\ \mu \neq \nu \text{ のとき } e_{\mu\nu} = 0)$$

はすぐにわかる．

r 個の関数 $f_1, \ldots, f_r$ に対し，すべてが 0 ではない係数 c_i $(i = 1, \ldots, r)$ の，線形同次な関係 $\sum_{i=1}^{r} c_i f_i = 0$ が x について恒等的に成り立つとき，これらの関数は**線形従属**であるという．線形従属ではない場合，それらは**線形独立**であるという．直交系の関数が常に線形独立であることは重要である．実際，等式

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n = 0$$

を仮定すると，両辺に φ_ν を掛けて積分することにより直ちに $c_\nu = 0$ が得ら

れるからである.

2.1.2　関数の直交化

与えられた無限個の関数 $v_1, v_2, \ldots$ の系について，任意の自然数 r に対して，どの r 個の関数も線形独立であるとする．そのとき「直交化の方法」によって，この系から正規直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ を，φ_n が $v_1, v_2, \ldots, v_n$ の然るべき線形結合であるようにつくることができる：まず，$\varphi_1 = v_1/\sqrt{Nv_1}$ とおく．次に係数 c_1, c_2 を同時には 0 でなく，かつ関数 $\varphi_2' = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ が φ_1 に直交するように，すなわち $c_1 + c_2(\varphi_1, v_2) = 0$ が成り立つように定める．v_1 と v_2 が線形独立であり，従って φ_1 と v_2 が線形独立であることから，関数 φ_2' は恒等的には 0 にならない．従って，$\varphi_2 = \varphi_2'/\sqrt{N\varphi_2'}$ とおくことによって，φ_1 に直交する正規化された関数が得られる．ついで，関数

$$\varphi_3' = c_1^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 + c_3^*v_3$$

をつくるのであるが，その係数 c_1^*, c_2^*, c_3^* をすべてが 0 にはならないように，そうして 2 つの同次線形方程式

$$(\varphi_3', \varphi_1) = c_1^* + c_3^*(\varphi_1, v_3) = 0, \quad (\varphi_3', \varphi_2) = c_2^* + c_3^*(\varphi_2, v_3) = 0$$

が成り立つように定める．v_1, v_2, v_3 が線形独立であり，従ってまた $\varphi_1, \varphi_2, v_3$ が線形独立だから，関数 φ_3' は恒等的には 0 にならない．従って，$\varphi_3 = \varphi_3'/\sqrt{N\varphi_3'}$ によって，φ_1, φ_2 のどちらにも直交する正規化された関数が得られる．この手順を限りなく続けることによって，望まれる正規直交系が得られるが，それは次の漸化式によって表わされる：

$$\varphi_{n+1} = \frac{\varphi_{n+1}'}{\sqrt{N\varphi_{n+1}'}}, \quad \varphi_{n+1}' = v_{n+1} - \sum_{h=1}^{n} \varphi_h(\varphi_h, v_{n+1}).$$

今後，直交化といえば，別の方法であるとことわらない限り，上に説明した手順を意味するものとする．なおこの手順は直交化と正規化を同時に行なうものである.

2.1.3 ベッセルの不等式・関数系の完全性・平均近似

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ を正規直交系，f を任意の関数とするとき

$$c_\nu = (f, \varphi_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

を，与えられた正規直交系による f の**展開係数**，あるいは成分[5]という．

自明な不等式

$$\int \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu \right)^2 dx \geqq 0 \tag{6}$$

において，平方を展開し，項別に積分すれば

$$0 \leqq \int f^2\, dx - 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int f\varphi_\nu\, dx + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 = Nf - 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2$$

となり，次式が得られる：

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \leqq Nf. \tag{7}$$

右辺は n に無関係な一定数だから

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \leqq Nf. \tag{8}$$

も成り立つ．

ベッセルの不等式と呼ばれるこの基本的な不等式は，任意の正規直交系に対して成り立つ．それは，式 (8) の左辺における，展開係数の平方和である非負項級数が収束することを示すものである．

複素数値関数系に対しては，展開係数 c_ν として $c_\nu = (f, \bar{\varphi}_\nu)$ をとると，(8) に対応する関係

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 \leqq Nf = (f, \bar{f}) \tag{8'}$$

---

[5] ［原註］フーリエ (Fourier) 級数論での用語法に従って，「フーリエ係数」と呼ぶこともしばしばである．

が成り立つ．この不等式は実関数の場合と同じく，不等式

$$\int\left|f(x)-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\varphi_\nu\right|^2dx=Nf-\sum_{\nu=1}^{n}|c_\nu|^2\geqq 0$$

から従う．

なお，(6) の積分は次の近似問題を考える際に自然に登場する：

《問題》 自然数 n を固定して，与えられた関数 f を γ_i を定係数とする線形結合 $\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\varphi_\nu$ によって最小2乗法の意味で近似する．すなわち，「平方誤差の平均（積分）」$M=\int(f-\sum\gamma_\nu\varphi_\nu)^2\,dx$ をできるだけ小さくするように近似するのである．□

簡単な変形によって，等式

$$M=\int\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\varphi_\nu\right)^2dx=\int f^2\,dx+\sum_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu-c_\nu)^2-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu^2$$

が得られ，これから直ちに M の最小は $\gamma_\nu=c_\nu$ のとき到達されることがわかる．

ある正規直交系 $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ について考えよう．もし，任意の区分的に連続な関数 f に対して，最小の平方誤差 $\int\bigl(f-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\varphi_\nu\bigr)^2\,dx$ が，n を十分大きくとれば，どんな小さな正数よりも小さくできるならば，すなわち，区分的に連続な任意の関数が，十分多くの項をもつ線形結合 $\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\varphi_\nu$ によって f が最小2乗法の意味で（いいかえれば**平均**において）いくらでもよく**近似できる**ならば，関数系 $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$ は**完全直交関数系**であるという．この場合，上に述べたことから，任意の関数 f の展開係数 $c_\nu=(f,\varphi_\nu)$ に対して，いわゆる**完全性関係**

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu^2=Nf \tag{9}$$

が成り立つ[6]．なお，このことは次のように一般化される．

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu d_\nu=(f,g)\quad\text{ただし}\quad c_\nu=(f,\varphi_\nu),\ d_\nu=(g,\varphi_\nu). \tag{9'}$$

6 ［訳註］ベッセルの不等式の等号の場合に相当する等式 (9) はパーセバルの等式とも呼ばれる．

$(9')$ を導くには，関数 $f+g$ に対して (9) を用い，

$$N(f+g) = Nf + Ng + 2(f,g) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu + d_\nu)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu^2 + d_\nu^2 + 2c_\nu d_\nu).$$

これから f および g に対応する等式を引けばよい．

ちなみに，関数系 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ が完全であるためには，完全性関係 (9) が**任意の**連続関数 f に対して成り立てば十分である．なぜなら，任意の区分的に連続な関数 g は連続関数 f によって，積分 $\int(f-g)^2 dx$ がいくらでも小さくなるように近似できるからである．このような連続関数 f を構成するには，たとえば，関数 g を曲線で表わし，g の跳躍点からの距離が十分小さい δ 以下にあるような x 軸上の 2 点を左右にとり，これに対応する曲線上の 2 点を直線で結び，この区間内では曲線 g をいまつくった直線でおきかえればよい[7]．実際，$a_1, a_2, \ldots$ を関数 g の展開係数，$c_1, c_2, \ldots$ を関数 f の展開係数とすれば，$\int\left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right)^2 dx$ は，n を十分大きくとれば，いくらでも小さくできる．これよりさらに，シュヴァルツの不等式を用いれば，積分

$$M' = \int\left(g - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right)^2 dx = \int\left[(g-f) + \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right)\right]^2 dx$$

についても同じことがいえる．実際，

$$M' = N(g-f) + N\left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right) + 2\left(g-f, f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right)$$

から，次の不等式が従うからである：

$$M' \leqq N(g-f) + N\left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right) + 2\sqrt{N(g-f)N\left(f - \sum c_\nu\varphi_\nu\right)}.$$

一方，展開係数 a_ν は g の平方誤差の平均を最小にするものであるから

$$M = \int\left(g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\varphi_\nu\right)^2 dx \leqq M'.$$

これによって，g に対する完全性関係が証明された．

---

[7]［原註］たとえば L を $|g(x)|$ の上界とし，積分区間内にある $g(x)$ の不連続点を q 個とすれば $\int(f-g)^2\,dx \leqq 8L^2\delta q$．右辺は距離 δ を然るべくとればいくらでも小さくできる．

ここで注意するべきことは，関数系 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ の完全性，すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\int\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\varphi_\nu\right)^2dx=0$$

からは，各点収束の意味で $f=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu$ であるとは，すなわち f が φ_ν の級数に展開できるとは，決して結論するわけにはいかないことである．**もし級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu$ が一様収束ならば，積分記号内で極限をとることが許されるから，展開は成立する．** 完全性は明らかに不可欠な条件である．なぜなら，たとえば完全な系 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ から 1 つの関数を取り出せば，残りの関数からなる完全でない系について，その関数の展開係数はすべて 0 となるからである．一方，完全系 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ に関しても，関数 f が展開できるかどうかという問題は，さらなる研究を必要とする．これについてはあとで度々取り扱うことにする（第 5 章および第 6 章）．

なお，上出の極限式の内容は言葉では次のように表現される：

《定理》 関数 $\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu$ は関数 f に平均収束する．□

なお，次の定理が成り立つ：

《定理》 区分的に連続な関数は，与えられた完全直交系に関する展開係数によって一意に決定される．ここに，一意に定まるという意味は，同じ展開係数をもつ 2 つの区分的に連続な関数は，互いに等しいということである．□

なぜなら，係数が等しい 2 つの区分的に連続な関数の差は係数 0 をもち，従って完全性関係から，そのノルムは 0 である．すなわちそれは恒等的に 0 となる．以上により，関数は完全直交系に関する展開によって，普通の意味ではなくて平均収束の意味においてではあるが，一意的に定められる．多くの実践的な場合において，この平均収束で十分である．

関数系が完全であるという概念は，その系が直交化あるいは正規化されていないときも意味をもっている．**一般にある関数系が完全であるというのは，任意の区分的に連続な関数が，この系の関数の線形結合によって，平方誤差の平均の意味でいくらでもよく近似できることである．** 系が完全ならば，それから直交化の方法によって得られる直交系も完全である．

2.1.4 無限多変数（無限成分）の直交変換およびユニタリ変換

正規直交関数系は，n 次元ベクトル空間の正規直交系と多くの類似性をもっている：関数 f の成分 $c_\nu = (f, \varphi_\nu)$ は，まさに「座標関数」$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ が定める**無限次元空間の座標系**に関する直交座標とみなすことができる．

$\psi_1, \psi_2, \ldots$ が第 2 の正規直交関数系であり，$d_\nu = (f, \psi_\nu)$ をそれによる f の成分であるとしよう．もし $\{\varphi\}$, $\{\psi\}$ が共に完全であるならば，系 $\psi_1, \psi_2, \ldots$ の完全性関係 (9′) を関数 f および φ_i に適用することによって，次の無限個の連立方程式が，直ちに導かれる：

$$(10) \qquad c_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} d_k, \quad a_{ik} = (\varphi_i, \psi_k) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

同様にして逆の連立方程式も得られる：

$$(10') \qquad d_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} c_k, \quad a_{ki} = (\psi_i, \varphi_k) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

このとき係数は，条件

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} a_{jk} = (\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0 & (j \neq i \text{ のとき}) \\ 1 & (j = i \text{ のとき}) \end{cases},$$

$$(11') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} a_{kj} = (\psi_i, \psi_j) = \begin{cases} 0 & (j \neq i \text{ のとき}) \\ 1 & (j = i \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たしている．これは，まさに前に述べた n 次元空間の直交関係（§1.1）を無限次元空間へ拡張したものになっている．そこで，条件 (11), (11′) を満たす (10) の変換を**無限成分の直交変換**という．

同様にして，2 つの複素正規直交系に関する与えられた関数の展開係数は，**無限成分のユニタリ変換**によって互いに結びつけられる．

2.1.5 多変数の場合での結果の成立・仮定の拡張

これまでの概念および考察は，1 変数 x の関数の代わりに多変数の，たとえば x と y の関数を対象としても，すべてそのまま成り立つ．ここで，点 (x, y)

は一定の有限領域 G 内を動くものとし，その面積要素を dG で表わす．G 内の 2 つの関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ との内積を $(f,g)=\int_G fg\,dG$ で与えれば，これまでの記号や証明は本質的に何の変わりもなく通用する．

さらに，基本領域が無限に広がっているときでも，考察の対象とする関数の平方が全基本領域で積分可能であると仮定する限り，すべての概念と事実はそのまま成り立つ．

最後に，いままで述べた考えの進め方は，関数 f が基本領域内で無限になる点をもっている場合でも，その平方が基本領域で積分できるならば，そのまま通用することを注意しておこう．

2.1.6　多変数関数の完全系の構成

1 変数の関数の完全系があるとき，次の定理によって，2 変数または多変数関数の完全系を構成することができる：

《定理》

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots$$

を区間 $a \leqq s \leqq b$ における完全正規直交系とし，また各 $i=1,\ 2,\ \ldots$ に対して

$$\psi_{1i}(t),\ \psi_{2i}(t),\ \ldots$$

を区間 $c \leqq t \leqq d$ における完全正規直交系とする．そのとき

$$\omega_{ik}(s,t)=\varphi_i(s)\psi_{ki}(t)$$

は，変数 s および t に関する，長方形 $a \leqq s \leqq b,\ c \leqq t \leqq d$ における完全正規直交系になる．特に関数系 $\varphi_i(s)\varphi_h(t)$ は正方形 $a \leqq s \leqq b,\ a \leqq t \leqq b$ における完全正規直交系となる．すなわち $f(s,t)$ をこの正方形内における $s,\ t$ の連続関数とするとき，完全性関係

$$\iint f^2(s,t)\,ds\,dt=\sum_{i,k=1}^{\infty}\left(\iint f(s,t)\omega_{ik}(s,t)\,ds\,dt\right)^2$$

が成り立つ．□

これを証明するには，関係 $\int f^2(s,t)\,ds = \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2(t)$，ただし $g_i(t) = \int f(s,t)\varphi_i(s)\,ds$ から出発する．この等式は関数系 φ_i の完全性の現れである．右辺の級数は一様収束だから[8]，t について項別積分することができて次式が従う：

$$\iint f^2(s,t)\,ds\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int g_i^2(t)\,dt.$$

右辺の i の項に関数系 $\psi_{ki}(t)$, $(k = 1, 2, \ldots)$ の完全性関係を適用すれば，求める完全性関係が直ちに得られる．

2.2 関数の集積原理

2.2.1 関数空間における収束

関数空間の関数と n 次元空間のベクトルとの間の類似は，関数およびベクトルの無限集合を考察すると多くの場合において通用しなくなる．(有限次元の）ベクトルの集合に対しては解析学の初等的な事実（ワイエルシュトラスの集積定理や収束の定義）から直ちに次のことが導かれる：長さ $|\mathbf{v}|$ が有界な，あるいはノルム平方 $\mathbf{v}^2 = N\mathbf{v}$ が有界なベクトル $\mathbf{v}$ の任意の無限集合から，収束する部分列を選ぶことが可能である．また，ベクトル列 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ が条件 $\lim_{n,m\to\infty} N(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$ を満たすならば，極限ベクトル $\mathbf{v} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n$ の存在がいえる．さらには $\lim_{n\to\infty} N\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ から $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ が結論される．ところが，無限次元の空間に対しては，これらの事実はもはや成立しない．た

---

8 ［原註］これは次のディニ (Dini) の定理から従う：（有界な）閉領域 G 内で正値連続な関数を項とする級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(t)$ が連続関数 $S(t)$ に収束するならば，その収束は一様である．簡単に証明を述べよう．$S_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(t)$, $S(t) = S_n(t) + R_n(t)$ とおく．もし主張が正しくなければ，ある正の数 α と無限に増大する数列 $n_1, n_2, \ldots$，およびそれに対応する G 内の点 $t_1, t_2, \ldots$ が存在し，$R_{n_i}(t_i) \geqq \alpha$, $S_{n_i}(t_i) \leqq S(t_i) - \alpha$ となる．ここで（必要ならば点列を選び直すことにより），t_i は G 内のある点 t に収束するものと仮定してよい．ここで，任意に与えられた数 N を固定する．$n_i \geqq N$ となる n_i については $S_{n_i}(t_i) \geqq S_N(t_i)$．よって $S_N(t_i) \leqq S(t_i) - \alpha$．ここで i を無限に大きくすると，仮定の連続性から $S_N(t) \leqq S(t) - \alpha$ が得られる．これは十分大きな N に対しては，明らかに不可能である．

とえば，ノルム平方 Nf が有界な連続関数の無限集合から，連続関数に収束するような部分列を取り出すことは必ずしもできることではない．また連続関数列について，$\lim_{n\to\infty} Nf_n = 0$ であるからといって，$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$（各点収束）を結論できない．たとえば，基本領域 $-1 \leqq x \leqq +1$ において

$$f_n(x) = 1 - n^2x^2 \quad \left(x^2 \leqq \frac{1}{n^2} \text{ のとき}\right),$$
$$f_n(x) = 0 \qquad \left(x^2 \geqq \frac{1}{n^2} \text{ のとき}\right)$$

で定義される関数列を考えてみよう．この関数列のどの部分列も，$x = 0$ において不連続な関数

$$f(x) = 0 \quad (x \neq 0 \text{ のとき}),$$
$$f(x) = 1 \quad (x = 0 \text{ のとき})$$

に収束する．その一方で $\lim_{n\to\infty} Nf_n = 0$ である．

ベクトルと関数との間の類似を追及すること，すなわち**関数空間**に対してワイエルシュトラスの集積原理や上述した収束定理を保持しておくことは，様々な研究に対して，特に収束や存在の証明において是非とも望まれることである．この課題を解くためには 2 つの道がある．1 つは許容する関数の範囲を拡げ，かつ，積分と収束の概念を拡張する道である．この道はルベーグ (Lebesgue) の理論に依存するものであり，本書の目的には適当でないと思われるので触れることをしない[9]．

我われが採用する第 2 の道は，集積原理が成り立つように，基礎においた関数の範囲を制限することである．この制限は，対象とする関数全体に対して，連続性を要求するだけでなく，**同程度連続性**を要求するものである．例として，1 個の独立変数をもつ関数の場合について述べよう．

この場合，ある関数の集合が同程度連続であるとは，任意の正数 ε に対して，ε に関係するが，この集合の個々の関数 $f(x)$ には依存しない正数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ が存在して，独立変数の領域に属す x_1, x_2 が条件 $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ を満たせば $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ の関係が導かれるということである．たとえば，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，ある定数 M に対し $\int_a^b f'^2(x)\,dx \leqq M$ を満たす関数

[9] ［原註］しかし §2.10, 2.11 を見よ．

$f(x)$ の全体は同程度連続な関数集合である．実際，この区間の 2 点 x_1, x_2 に対して

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx$$

が成り立ち，シュヴァルツの不等式によれば

$$|f(x_2) - f(x_1)|^2 \leqq |x_2 - x_1| \int_{x_1}^{x_2} f'^2(x)\,dx \leqq |x_2 - x_1|M$$

となる．この不等式から，$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{M}$ として，同程度連続性の条件が満足されることがわかる．

このような関数の集合に対しては次の**集積原理**が成り立つ：

《定理》 基本領域 G において一様に有界であり，同程度連続な関数の集合からは，ある連続関数に G で一様収束する部分列 $q_1(x)$, $q_2(x)$, ... を選ぶことができる[10]．□

この定理は，有界な点集合に対するワイエルシュトラスの集積定理に類似した定理が，上のような連続関数の集合に対して成り立つことを示しており，上述の期待に応えるものである．

証明のために，まず，区間内のいたる所で密 (dense) であるような可算集合 x_1, x_2, ... をとる．たとえば，区間を逐次に 2 等分していく際のすべての分点，すなわち，区間を 2 等分し，新しくできた部分集合をさらに 2 等分し，$\cdots$ というようにして得られるすべての区間の集合を考える．さて，点 x_1 における関数値の集合は，ワイエルシュトラスの集積定理により，収束する部分列を含んでいる．それに応じた関数をとることにより，与えられた関数の集合から無限個の関数 $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... を，点 x_1 における関数値が収束するように選ぶことができる．さらに，この関数列から同様にして，部分列 $b_1(x)$, $b_2(x)$, ... を，点 x_2 における関数値列が収束するように選び出すことができる．以下同様．こうして得られたすべての関数列を書き並べ，そ

---

10 ［原註］なお，有界性については，関数の集合が G のどこか 1 点だけで一様に有界であることを仮定すれば十分である．これから同程度連続性によって，全領域 G に対する一様有界性が導かれる．

［訳註］アスコリ–アルツェラ (Ascoli–Arzelà) の定理とも呼ばれている．

の「対角列」$a_1(x) = q_1(x)$, $b_2(x) = q_2(x)$, ... をとる．そうして，これが全区間で一様に収束することを主張するのである．

このことを示すために，任意の小さい正の数 ε に対して，自然数 M を十分大きくとって，上に述べた点集合 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ の点 $x_1, x_2, \ldots, x_M$ による区間 $a \leqq x \leqq b$ の分割が次の意味で十分細かくなるようにする．すなわち，各点 x に対しても，$h \leqq M$ なる点 x_h で $|x - x_h| \leqq \delta(\varepsilon)$ を満たすものが存在するようにする．ここに $\delta(\varepsilon)$ は同程度連続の条件中に与えられたものである．いま，ε に依存する数 $N = N(\varepsilon)$ を十分大きくとれば，$m > N, n > N$ のとき，点 x_h $(h = 1, 2, \ldots, M)$ において

$$|q_m(x_h) - q_n(x_h)| < \varepsilon$$

が成り立つようにできる．同程度連続性によって，適当な $h \leqq M$ をとれば

$$|q_m(x) - q_m(x_h)| < \varepsilon,$$
$$|q_n(x) - q_n(x_h)| < \varepsilon$$

が成り立つから，$m > N, n > N$ のとき

$$|q_m(x) - q_n(x)| < 3\varepsilon$$

となる．これによって，関数列 $q_1(x), q_2(x), \ldots$ の区間 $a \leqq x \leqq b$ における一様収束が示された．極限関数 $q(x)$ が連続なことは収束の一様性から直ちに得られる．ちなみに，**上の関数集合から選ばれた任意の部分列は一様収束であることが**，同様な考察からわかることを注意しておこう．

同程度連続な関数の集合は，さらに次の性質をもっている：

《定理》 関数列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ が同程度連続な集合に属し，$\lim_{n\to\infty} Nf_n = 0$ ならば，一様収束の意味で $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ である．さらに Nf_n が有界で，$\lim_{n,m\to\infty} N(f_n - f_m) = 0$ ならば，連続関数 $f(x)$ が存在して，一様収束の意味で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ である．□

上の主張の最初の部分を証明するために，ある点 $x = x_0$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$ でないと仮定しよう．すると，ある正数 $2\alpha^2$ に対して $f_n^2(x_0) > 2\alpha^2$ となるような任意に大きな番号 n が存在する．$f_n(x)$ の同

程度連続性により，点 x_0 を含むある長さ δ の区間が存在し，この区間内で上の n に対して不等式 $f_n^2 > \alpha^2$ が成り立つ．従ってノルム平方 $Nf_n > \delta\alpha^2$ となり，これは仮定に反する．第 2 の部分も，全く同様に証明できるのであるが，それは読者にまかせよう．

同程度連続でノルムが有界な関数の集合がさらにもつのは次の性質であるが，それを**滑らかさ**[11]と呼ぶことにしよう：

《定理》 r を正の整数とし，$c_1, c_2, \ldots, c_r$ を絶対値がある値，たとえば 1 以下であるような任意の数とする．そのとき，正の数 ε のみに依存し，ε とともに 0 に近づく数 $\delta(\varepsilon)$ が存在し，$N(c_1 f_1 + \cdots + c_r f_r) < \varepsilon$ ならば

$$|c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_r f_r| < \delta$$

という関係が成り立つ．ただし，$f_1, f_2, \ldots, f_r$ は集合に属する任意の r 個の関数である．□

この定理の証明は，すでに証明したことから，次の事実に注意しさえすれば直ちに得られる．すなわち，関数の集合が同程度連続ならば，r が一定，$|c_r|$ が有界なとき，すべての線形結合 $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_r f_r$ をそれにつけ加えても同程度連続性が保たれることである．

関数列 $f_1, f_2, \ldots$ が滑らかであるという性質は，次の形に言い換えることができる．すなわち，その関数列 $f_1, f_2, \ldots$ の任意の部分列から一様収束する部分列を選び出すことができる．

集積原理から，次の少々一般的な定理が直ちに得られる：

《定理》 r 個の関数の組の列

$$\begin{array}{cccc} p_{11}(x), & p_{12}(x), & \cdots, & p_{1r}(x), \\ p_{21}(x), & p_{22}(x), & \cdots, & p_{2r}(x), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

において，登場する関数は，すべて $a \leqq x \leqq b$ で同程度連続かつ一様に有界

---

[11] ［原註］関数の集合に対するこの概念を p. 51 で導入された「滑らかな関数」と混同しないこと．

であるとする．この r 個の関数からなる組の列を $G_1, G_2, \ldots$ とする．そのとき $p_{n_i,k}(x)$ ($i=1,2,\ldots$, $\lim_{i\to\infty} n_i=\infty$, $k=1,2,\ldots,r$) を適当にとって，関数 $p_{n_i,k}(x)$ を，i が増大するとき一様に r 個の連続関数 $p_1(x), \ldots, p_r(x)$ に収束させることができる（組の列の収束部分列の選出）．□

なぜなら，適当に組を選んで，第1列について収束させることができる．次に，得られた組の列からさらにその部分列を，第2列が収束するように選ぶ．以下同じ方法を $(r-2)$ 回繰り返すのである．

2.3　独立尺度と次元数

2.3.1　独立尺度

r 個の関数 $f_1, \ldots, f_r$ が線形従属であるか，あるいは線形独立であるかの判定条件を，n 次元空間のベクトルについて前に扱ったときと同じようにして導くことができる．そのため，r 個の実数 $t_1, \ldots, t_r$ を変数とする2次形式

(12)
$$K(t,t)=N(t_1f_1+\cdots+t_rf_r)$$
$$=\int(t_1f_1+\cdots+t_rf_r)^2\,dx=\sum_{i,k=1}^{r}(f_i,f_k)t_it_k$$

を考え，その最小の固有値 m，すなわち $\sum_{i=1}^{r} t_i^2=1$ なる条件のもとで t_i を変数としたときの $K(t,t)$ の最小値——それは決して負とならない——を関数 $f_1, \ldots, f_r$ の**独立尺度**と呼ぶ．関数 $f_1, \ldots, f_r$ が線形従属であるための必要十分条件は，この独立尺度 m の値が0になることである．他方，線形独立の場合にはこの m の値は，線形独立の程度を示唆するものとみなされる．独立尺度 m が0になることは，関数系 $f_1, \ldots, f_r$ の**グラムの行列式**

(13)
$$\Gamma(f_1,\ldots,f_r)=\begin{vmatrix}(f_1,f_1) & \cdots & (f_1,f_r)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (f_r,f_1) & \cdots & (f_r,f_r)\end{vmatrix}$$

が0になることと同値である．この事実は，グラムの行列式が $K(t,t)$ の負にならない固有値すべての積であることからわかる．さらに，M を $K(t,t)$

の最大の固有値とすれば，$m^r \leqq \Gamma \leqq mM^{r-1}$ が成り立つ．また，$K(t,t)$ の正値性から $\Gamma \geqq 0$ である[12]．これらのことから，**関数 $\boldsymbol{f_1, \ldots, f_r}$ が線形従属であるための必要十分条件は，グラムの行列式が 0 となることである．**

r 個の線形独立な関数 $f_1, \ldots, f_r$ から，線形結合 $f = \sum_{i=1}^{r} u_i f_i$ をつくり，さらに f が正規化されているとするならば，その係数 u_i の絶対値はすべて $f_1, \ldots, f_r$ の独立尺度 m だけに関連する限界 $\frac{1}{\sqrt{m}}$ を超えない．なぜなら m の定義から

$$v_i = \frac{u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} u_i^2}} \quad \text{に対して，明らかに}$$

$$m \leqq \int \left(\sum_{i=1}^{r} v_i f_i \right)^2 dx = \frac{Nf}{\sum_{i=1}^{r} u_i^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} u_i^2}.$$

これから $\sum_{i=1}^{r} u_i^2 \leqq \frac{1}{m}$．従って：

《定理》 r 個の関数の独立尺度が正の数 μ 以上であれば，これらを直交化するとき，すなわち，これらを適当に正規化された線形結合でおきかえるとき，絶対値において $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ を超える係数は現れない．□

2.3.2　関数列の漸近次元

正規化された関数列 $f_1, f_2, \ldots$ において，あるいは一般にノルムが有界な関数列において，任意の $(r+1)$ 個が互いに線形従属である，すなわちすべての関数が，ある r 個の基本関数 $g_1, \ldots, g_r$ の線形結合 $t_1 g_1 + \cdots + t_r g_r$ で表わされるが，一方，$g_1, \ldots, g_r$ のうちの r 個より少ない関数の線形結合では表わせないという状況を考えよう．すなわち，全関数列が $t_1 g_1 + \cdots + t_r g_r$ なる**線形集合**に属しているとき，幾何学的な用語法に従って，この関数列の**次元数**はちょうど r であるという．

---

[12] ［原註］この不等式は，シュヴァルツの不等式の拡張である．実際，$n = 2$ のときはこれに一致する．

関数列 f_1, f_2, ... が有限の次元をもたないときは，次の 2 つの場合のどちらかが起こる．第 1 の場合は，任意に大きな正整数 s に対して，この関数列の中から，いくらでも大きくなる添字 $n_1, \ldots, n_s$ をもつ s 個の関数の組 $f_{n_1}, \ldots, f_{n_s}$ で，その独立尺度が，n_i には無関係な（s には関係するかもしれない）ある正の数以上のものが存在する場合である．このとき，関数列の漸近次元数は ∞ であるという[13]．

第 2 の場合は，十分大きな s に対しては，$f_{n_1}, \ldots, f_{n_s}$ の独立尺度が，$n_1, \ldots, n_s$ を無限大にしたとき，常に 0 に収束する場合である．このとき，$s > r$ ならば独立尺度は 0 に収束するような最小整数 r を関数列の**漸近次元数**と名付ける．特に r が 0 ならば，Nf_n は n が増大するとき 0 に収束する．漸近次元数が r ならば，初めの方の十分多くの関数を除けば，任意の $(r+1)$ 個の関数は，いわば,「ほとんど」線形従属である．

ここに導入された概念は，n 次元空間のベクトル列の場合と平行して構成されたものであるが，意図するところは，漸近次元数 r の関数列を r 個の基本関数の線形結合の集合に極限において近接する関数列をイメージして定義されたものである．このことは，ルベーグの積分概念とその理論によって，許容する関数の範囲を拡げるとき，一般に成り立つ．しかし本書では，初等的な立場を保ちたいので，上のことを証明するにあたり，§2.2 で述べた制限，すなわち，関数列が滑らかであるという仮定を設けねばならない（p. 65 参照）．

そうすると次の定理が成り立つ：

《定理》 $f_1, f_2, \ldots$ が滑らかな関数列で，その漸近次元数が r ならば，r 個の互いに線形独立な，従って，正規化されかつ互いに直交するようにとり得る関数 $g_1, \ldots, g_r$ が存在して，十分大きなすべての n に対して，関数 f_n と，線形結合 $t_1 g_1 + \cdots + t_r g_r$ の集合に属する関数との差を，与えられた任意に小さい ε 以下にできる．しかも r 個より少ない基本関数の線形結合の集合で，このような性質をもつものは存在しない．□

この極限の線形集合は，次のようにも特徴づけられる．問題の関数列からとった r 個の関数 $f_{m_1}, \ldots, f_{m_r}$ の組の列を $G_1, G_2, \ldots, G_m, \ldots$ とし，そ

13　［原註］最も簡単な例は正規直交関数系である．このときは，どの関数の組に対しても独立尺度は 1 である．

の独立尺度は一定の正の数 μ より大きく，組内の添字 m_i $(i=1,\ldots,r)$ は m とともに無限に大きくなるものとする．そのとき G_m の関数を基本関数として定義した線形集合 S_m は，m が増大するとき，r 個の線形独立な関数 $g_1,\ldots,g_r$ によって定義された極限の集合 T に次の意味で収束する．すなわち，十分大きな m に対して S_m 内の任意の正規化された関数は，T のある関数との差がいくらでも小さくなる．

証明をわかりやすくするために，与えられた関数 f と関数からなるある線形集合 S との距離が d より小さいということを，f と，S に属するある関数との差の絶対値が，定義域において常に d より小さいこととする．さらにこれに対応して，関数の 2 つの線形集合 S と S^* との距離が d より小さいとは，一方の線形集合に属する任意の正規化された関数は，他の線形集合内の適当な正規化された関数から，差の絶対値における「へだたり」が d 以下であることとする．

さて，いくつかのことが容易にわかる．まず，十分大きな m と n に対しては，線形集合 S_m と関数 f_n との距離は十分小さくなる．なぜなら，f_n, $f_{m_1},\ldots,f_{m_r}$ の独立尺度は十分大きな m, n に対しては十分小さいからである．次に，考えている関数列が滑らかであることによって，$\sum_{i=0}^{r} u_i^2 = 1$ を満たす $(r+1)$ 個の係数 $u_0, u_1,\ldots,u_r$ で $|u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \cdots + u_r f_{m_r}|$ が十分小さいものがある．ここで m, n が増大するとき，u_0 の絶対値はある値以上である．そうでなければ $f_{m_1},\ldots,f_{m_r}$ の独立尺度は，仮定に反して，いくらでも小さくなるからである[14]．これから $u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \cdots + u_r f_{m_r}$ を u_0 で割って $\frac{u_i}{u_0} = -t_i$ とおけば，十分大きな m, n に対して f_n と線形集合 S_m に属する関数 $t_1 f_{m_1} + \cdots + t_r f_{m_r}$ との差は十分に小さい．従って，十分大きな m と n をとれば，線形集合 S_m と S_n との距離はいくらでも小さくできる．さて，ε をあとで決める十分小さな正数とし，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ を $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon$ なる正数列とする．さらに m_i を正数列で，$n, m \geqq m_i$ ならば S_m と S_n の距離が ε_i より小さくなるようなものとする．まず集合 S_{m_i} の中の r 個の正規化さ

---

14 ［訳註］三角不等式 $\sqrt{N(u_1 f_{m_1} + \cdots + u_r f_{m_r})} \leqq \sqrt{N(u_0 f_0 + u_1 f_{m_1} + \cdots u_r f_{m_r})} + \sqrt{N(u_0 f_n)}$ の右辺において，$N(u_0 f_n) \leqq |u_0|^2 N(f_n)$ が成り立つこと，および $N(f_n)$ の有界性に注意すれば，$|u_0| \to 0$ につれて右辺とともに左辺が小さくなる．

れた関数 $h_{11}, \ldots, h_{1r}$ から出発し，次に，仮定から可能性が保証されていることであるが，S_{m_2} $(m_2 > m_1)$ の中から正規化された関数 $h_{21}, \ldots, h_{2r}$ を $|h_{2i} - h_{1i}| < \varepsilon_1$ $(i = 1, \ldots, r)$ となるようにとる．同様に S_{m_3} $(m_3 > m_2)$ の中の正規化された関数 $h_{31}, \ldots, h_{3r}$ を $|h_{3i} - h_{2i}| < \varepsilon_2$ となるようにとる．以下同様．$|h_{pi} - h_{qi}| < \varepsilon_p + \cdots \varepsilon_{q-1}$ $(p < q)$ が成り立つから，$i = 1, \ldots,$ r を固定したとき，関数列 h_{ni} $(i = 1, \ldots, r)$ は一様に極限関数 g_i に収束し，$|g_i - h_{1i}| < \varepsilon$ が成り立つ．ε を十分小さく選んでおけば，$h_{11}, \ldots, h_{1r}$ と同調して，関数 $g_1, \ldots, g_r$ は0でない独立尺度をもち，従って線形独立である．関数 $g_1, \ldots, g_r$ は明らかに上に述べた要求をすべて満足している．

2.4　ワイエルシュトラスの近似定理・ベキ関数および三角関数の完全性

2.4.1　ワイエルシュトラスの近似定理

完全な関数系の最も初等的な例は，ベキ関数

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$$

によって与えられる．これらは任意の閉区間 $a \leqq x \leqq b$ に対して完全な関数系をなす．実際，次の**ワイエルシュトラスの近似定理**が成り立つ[15]：

《定理》 区間 $a \leqq x \leqq b$ における任意の連続関数はこの区間において多項式によって一様に近似される．□

この定理は完全性以上のことを主張している．すなわち，平均収束だけでなく，一様収束の可能性も保証している．

証明するにあたり，区間 $a \leqq x \leqq b$ が $0 < x < 1$ の内部にすっかり含まれていると仮定する．よって，不等式 $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$ を満たす2つの数 α, β を選ぶことができるが，さらに区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ は

15　[原註] Weierstraß, K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente. Sitzungsber. Akad. Berlin, 1885, pp. 633–639, pp. 789–805，さらに Werke Bd. 3, pp. 1–37, Berlin 1903.

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の端まで然るべく連続に拡張されているものとする.

まず，積分

$$J_n = \int_0^1 (1-v^2)^n \, dv$$

を考える．J_n は n が増大するとき 0 に収束することはすぐにわかる．δ が $0 < \delta < 1$ を満たす定数であるとし

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1-v^2)^n \, dv$$

とおけば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0$$

となること，すなわち，直観的には明らかなことであるが，十分大きな n に対しては，（J_n の）0 から 1 までの全積分に関して，0 から δ までの積分が決定的な寄与をするということを示そう．実際 $n \geqq 1$ ならば次式が成り立つ：

$$J_n > \int_0^1 (1-v)^n \, dv = \frac{1}{n+1},$$

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1-v^2)^n \, dv < (1-\delta^2)^n (1-\delta) < (1-\delta^2)^n,$$

$$\frac{J_n^*}{J_n} < (n+1)(1-\delta^2)^n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0.$$

さて x は区間 $a \leqq x \leqq b$ にあると仮定して，式 P_n を次のようにおく：

$$P_n(x) = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\left[1-(u-x)^2\right]^n du}{\displaystyle\int_{-1}^1 (1-u^2)^n \, du} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

これは明らかに x について $2n$ 次の多項式であって，その係数は定積分の商で表わされる．以下に示すように，我われが求める近似をこの P_n が与えるのである.

置換 $u = v + x$ によって，分子は次のように計算される：

$$\int_\alpha^\beta f(u)\left[1-(u-x)^2\right]^n du = \int_{\alpha-x}^{\beta-x} f(v+x)(1-v^2)^n \, dv$$

$$= \int_{\alpha-x}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_\delta^{\beta-x} = I_1 + I_2 + I_3.$$

上において，正の数 δ は区間 $0<\delta<1$ に属するが，その値はあとで然るべく選ぶ．I_2 を次のように変形する：

$$I_2 = f(x)\int_{-\delta}^{\delta}(1-v^2)^n\,dv + \int_{-\delta}^{\delta}[f(v+x)-f(x)](1-v^2)^n\,dv$$
$$= 2f(x)(J_n - J_n^*) + \int_{-\delta}^{\delta}[f(v+x)-f(x)](1-v^2)^n\,dv.$$

区間 $a \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の一様連続性により，任意に小さい $\varepsilon > 0$ に対して，ε にのみ依存する数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ $(0 < \delta < 1)$ を，次の条件が成り立つように選ぶことができる．すなわち，$|v| \leqq \delta$ かつ $a \leqq x \leqq b$ のとき $|f(v+x)-f(x)| \leqq \varepsilon$ が成り立つようにである．そうすると，

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}[f(u+x)-f(x)](1-v^2)^n\,dv\right| \leqq \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}(1-v^2)^n\,dv$$
$$< \varepsilon\int_{-1}^{1}(1-v^2)^n\,dv = 2\varepsilon J_n.$$

さらに M を $\alpha \leqq x \leqq \beta$ における $|f(x)|$ の最大値とすれば，

$$|I_1| < M\int_{-1}^{-\delta}(1-v^2)^n\,dv = MJ_n^*, \quad |I_3| < M\int_{\delta}^{1}(1-v^2)^n\,dv = MJ_n^*$$

以上を合わせて，$P_n(x)$ の分母が $2J_n$ に等しいので，

$$|P_n(x) - f(x)| < 2M\frac{J_n^*}{J_n} + \varepsilon$$

となる．$\lim_{n\to\infty}\frac{J_n^*}{J_n} = 0$ であるから，十分大きな n を選べば，右辺は 2ε より小さくなる．よって，$f(x)$ は，$a \leqq x \leqq b$ において実際に，多項式 $P_n(x)$ により一様に近似されている．

2.4.2　多変数の関数への結果の拡張

全く同様にして，$a_i \leqq x_i \leqq b_i$ $(i = 1, \ldots, n;\ 0 < a_i < b_i < 1)$ で連続な，m 変数 $x_1, \ldots, x_m$ の関数 f は，多項式

$P_n(x_1, \ldots, x_m)$

$$= \frac{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_m}^{\beta_m} f(u_1,\dots,u_m)\left[1-(u_1-x_1)^2\right]^n\cdots\left[1-(u_m-x_m)^2\right]^n du_1\cdots du_m}{\left[\displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^n\,du\right]^m}$$

によって一様に近似される．ただし，$0<\alpha_i<a_i<b_i<\beta_i<1$ である．

2.4.3　導関数を含めての近似

上の考察を，少々精密にすることによって，次のような，より一般な結果を得ることができる．閉領域 $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ 内で k 次の導関数まで連続な関数 $f(x_1,\dots,x_m)$ は，多項式 $P(x_1,\dots,x_m)$ によって，さらに，f の k 次までの導関数がこの多項式の k 次までの導関数によって，それぞれ一様に近似されるのである．

証明するにあたり，やはり，$0<a_i<b_i<1$ と仮定し，また関数 f は k 次までの導関数を含めて，もとの定義域より大きな直方体 $\alpha_i \leqq x_i \leqq \beta_i$ $(0<\alpha_i<a_i<b_i<\beta_i<1)$ にまで連続に拡張されており，しかも大きい方の領域の境界では，関数およびその $(k-1)$ 次までの導関数が 0 になっているものと仮定しておく．そうすると §2.4.3 で定義した多項式 $P_n(x_1,\dots,x_m)$ がここで求める近似を与えるのである．これは次の考察により簡単に確かめられる．すなわち，積分記号内で x_i による微分を行ない，ついでこの微分を u_i についての微分におきかえ，最後に境界条件を用いて部分積分によって変形すればよい．

2.4.4　三角関数の完全性

§2.4.1 から，三角関数の正規直交系

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \dots, \\ \qquad\quad \dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \dots \end{cases}$$

は区間 $-\pi \leqq x_i \leqq \pi$ で完全な関数系をなすという重要な事実が導かれる．さ

らに進んで次の定理が成り立つ：

《定理》 境界条件 $f(-\pi) = f(\pi)$ を満たす，区間 $-\pi \leqq x_i \leqq \pi$ において連続な任意の関数 $f(x)$ は，三角多項式

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu \cos\nu x + \beta_\nu \sin\nu x)$$

によって一様に近似される．ただし，α_ν, β_ν は定数である．□

このことを証明するために，x の代わりに θ と書き，ξ,η-平面における極座標 ρ および θ ($\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$) を考える．そのとき関数

$$\varphi(\xi,\eta) = \varrho f(\theta)$$

は全 ξ,η-平面で連続で，円 $\xi^2 + \eta^2 = 1$ の上では与えられた関数 $f(\theta)$ に一致する．ワイエルシュトラスの近似定理によって，その関数は ξ, η の多項式により，円 $\xi^2 + \eta^2 = 1$ を内部に含むある長方形内で一様に近似される．そこで $\rho = 1$ とおけば，$f(\theta)$ が $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の多項式により一様に近似できることがわかる．既知の三角関数の公式によればこのような多項式は必ず与えられた形

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu \cos\nu x + \beta_\nu \sin\nu x)$$

に表わされるのである．

連続関数が周期条件 $f(-\pi) = f(\pi)$ を満足しないときは，この条件を満足する連続関数 $g(x)$ を，積分 $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2 dx$ が任意に小さくなるようにとり，それを近似すればよい．それにより，すべての連続関数の三角多項式による平均近似の可能性が導かれ，さらに三角関数の完全性が得られるのである．

2.5　フーリエ級数

2.5.1　主定理の証明

§2.1 で行なった一般的な考察に従えば，三角関数の直交性により，n 次の最良な平均近似はいわゆる**フーリエ多項式**

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

によって与えられる．ここで

$$(15) \qquad \begin{cases} a_\nu = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \nu x \, dx \\ b_\nu = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \nu x \, dx \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \\ a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \end{cases}$$

である．

なお，関係式 $\cos \nu x + i \sin \nu x = e^{i\nu x}$ を用いれば上の三角多項式はさらに見やすい形

$$s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu e^{i\nu x} \qquad \left(\begin{matrix} 2\alpha_\nu = a_\nu - ib_\nu, & \nu > 0 \\ 2\alpha_\nu = a_{-\nu} + ib_{-\nu}, & \nu < 0 \end{matrix} \quad 2\alpha_0 = a_0 \right)$$

$$(15') \qquad \alpha_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\nu t} \, dt \qquad (\nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

に書きかえることができる．

しかしながら，平均近似では最良な多項式が一様近似をも与えるのかどうか，すなわち無限級数 $\lim_{n \to \infty} s_n(x)$ が一様収束して関数 $f(x)$ を表わすのかどうかは，ここまでの段階では確かではない．この問いがフーリエ級数の理論の中心問題である．

表現の便利さのために，関数 $f(x)$ はまず区間 $-\pi < x < \pi$ において定義されており，ついで関数方程式 $f(x + 2\pi) = f(x)$ によってこの基本領域を超えて周期的に延長されているものとしよう．さらに $f(x)$ のすべての跳躍点 ξ における関数値は「右および左からの極限値」$f(\xi + 0) = \lim_{h \to 0} f(\xi + h)$，および $f(\xi - 0) = \lim_{h \to 0} f(\xi - h)$ $(h > 0)$ の算術平均，すなわち $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi + 0) + f(\xi - 0)]$ であると仮定する．

このとき次の定理が成り立つ：

《定理》 区間 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で区分的に滑らかな，周期 2π の周期関数は，すべてフーリエ級数に展開できる．□

すなわちフーリエ多項式

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

は n が増大するとき $f(x)$ に収束する．さらに次のことも示そう：

《定理》 このフーリエ級数の収束は，関数が連続であるような任意の閉区間で一様である．□

はじめに，関数 $f(x)$ が連続なとき，従って不連続性は $f'(x)$ にしか現れない場合を証明しよう．α_ν, β_ν を $f'(x)$ の展開係数とすれば次の等式が成り立つ：

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x) \cos \nu x \, dx = \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin \nu x \, dx = \nu b_\nu,$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x) \sin \nu x \, dx = -\frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos \nu x \, dx = -\nu a_\nu,$$

$$\alpha_0 = 0.$$

$f'(x)$ は区分的に連続であるから，完全性関係が成り立つ：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'^2(x) \, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2(a_\nu^2 + b_\nu^2).$$

一方

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right| = \left|\sum_{\nu=n}^{m} \frac{1}{\nu}(\nu a_\nu \cos \nu x + \nu b_\nu \sin \nu x)\right|$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{\nu=n}^{m} \nu^2(a_\nu^2 + b_\nu^2)}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{m} \frac{1}{\nu^2}} \leqq \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'^2 \, dx}\sqrt{\sum_{\nu=n}^{m} \frac{1}{\nu^2}}$$

が得られる．

これより直ちに，無限級数

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

が絶対かつ一様に収束することが従う．よって三角関数の完全性から，この級数は関数 $f(x)$ に等しい．

フーリエ級数展開が不連続で区分的に滑らかな関数についても成り立つことを確認するために，まずそのような関数の特別なものとして

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \quad (0 < x < 2\pi \text{ のとき}),\\
h(0) &= 0,\\
h(x+2\pi) &= h(x)
\end{aligned}
$$

で定義される関数を取り上げよう．点 $x = \pm 2k\pi$ $(k = 0, 1, \ldots)$ における跳躍は π である．このフーリエ係数は次式で与えられる：

$$
a_0 = 0, \quad a_\nu = 0, \quad b_\nu = \frac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).
$$

期待される等式 $h(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}$ を証明するため，まず関数

$$
g(x) = h(x)(1 - \cos x) = 2h(x) \sin^2 \frac{x}{2}
$$

をつくると，これはいたる所連続でかつ区分的に滑らかである．この関数のフーリエ級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \sin \nu x$ は，すでに行なった考察から一様に収束し，$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \sin \nu x$ が成り立つ．ここで β_ν と b_ν とは等式

$$
\begin{aligned}
\beta_\nu &= b_\nu - \frac{1}{2}(b_{\nu-1} + b_{\nu+1}) \quad (\nu = 2, \ldots),\\
\beta_1 &= b_1 - \frac{1}{2} b_2
\end{aligned}
$$

によって関係づけられている．$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \sin \nu x = s_n(x)$, $\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \sin \nu x = \sigma_n(x)$ とおくと

$$
(1 - \cos x) s_n(x) = \sigma_n(x) - \frac{b_n}{2} \sin(n+1)x + \frac{b_{n+1}}{2} \sin nx
$$

が得られる．

上の式により，n が増すと，b_n は 0 に収束し，和 $\sigma_n(x)$ は一様に $g(x)$ に収束する．これから，$(1 - \cos x) s_n(x)$ も区間 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で $g(x)$ に一様に収束し，従って $s_n(x)$ 自身も点 $x = 0$ を含まない任意の閉じた部分区間で $h(x)$ に一様に収束する．

一方，除外点 $x=0$ では，すべての部分和 s_n が 0 であるから，$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0$ が成り立つ．ゆえに，級数の値は，跳躍点においても関数 $h(x)$ の値に等しい．その点での $h(x)$ の値は両側の極限値 $-\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2}$ との算術平均 0 に等しい．

関数 $h(x)$ が $x=0$ で π だけ跳躍するのと同じく，$h(x-\xi)$ は $x=\xi$ で同じだけ跳躍するが，基本領域のその他の点では連続な関数である．関数 $f(x)$ が区分的に連続で，区間 $0 \leqq x < 2\pi$ 内の点 $x=\xi_i$ $(i=1,\ldots,r)$ で $s(\xi_i) = f(\xi_i+0) - f(\xi_i-0)$ だけの跳躍をし，その他の点では連続であるとする．このとき

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{r} \frac{s(\xi_i)}{\pi} h(x-\xi_i)$$

とおけば，$F(x)$ はいたる所連続な関数で，かつ $f(x)$ と同様に，区分的に連続な1次導関数をもっている．従って，$F(x)$ は絶対かつ一様に収束するフーリエ級数に展開できる．他方，関数 $\sum_{i=1}^{x} \frac{s(\xi_i)}{\pi} h(x-\xi_i)$ もフーリエ級数に展開できて，その収束はどの跳躍点も含まないような閉区間で一様であるから，以上によってこの小節のはじめに掲げられた定理は完全に証明された．

2.5.2　多重フーリエ級数

多次元の直方体領域に対しても，三角関数を用いて直交関数系をつくることができる．見やすいように，2変数の「平面」の場合について説明するが，すべてのことが任意の次元でそのまま成り立つことに注意しておく．

正方形 $0 \leqq s \leqq 2\pi,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi$ において，関数

$$\begin{aligned}
&\cos\mu s \cos\nu t \quad (\mu = 0,1,\ldots;\ \nu = 0,1,\ldots),\\
&\sin\mu s \cos\nu t \quad (\mu = 1,2,\ldots;\ \nu = 0,1,\ldots),\\
&\cos\mu s \sin\nu t \quad (\mu = 0,1,\ldots;\ \nu = 1,2,\ldots),\\
&\sin\mu s \sin\nu t \quad (\mu = 1,2,\ldots;\ \nu = 1,2,\ldots)
\end{aligned}$$

は直交系をなす．展開公式は複素数を使う記法によって最も簡単に書くことができる．もし $F(s,t)$ が一様収束する2重フーリエ級数に展開できるならば

$$F(s,t)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}a_{\mu\nu}e^{i(\mu s+\nu t)},$$

$$\text{ただし}\ a_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}ds\int_0^{2\pi}dt\,F(s,t)e^{-i(\mu s+\nu t)}$$

が成り立つ.

この関数系の完全性と，それに伴なう完全性関係

$$\sum_{\mu,\nu=-\infty}^{\infty}|a_{\mu\nu}|^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(s,t)|^2\,ds\,dt$$

は，すでに述べた 1 変数の完全系から多変数の完全系をつくる際の一般定理に基づいて得られる（p. 54 参照）.

さらに §2.5.1 と同じようにして，$F(s,t)$ のフーリエ級数は，$\frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s\partial t}$ が存在して区分的に連続であるとき，絶対かつ一様に収束することが得られる.

2.5.3　フーリエ展開係数の大きさのオーダー

フーリエ級数が $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\alpha_\nu e^{i\nu x}=f(x)$ と展開される周期関数 $f(x)$ について，その $(h-1)$ 次までの導関数が連続で h 次の導関数が区分的に連続であるならば，$\nu\geqq 1$ に対して

$$2|\alpha_\nu|=\sqrt{a_\nu^2+b_\nu^2}\leqq\frac{c}{\nu^h}$$

という評価が成り立つ．ここで c は ν によらない定数を表わす．これからもわかるように，級数の係数は関数が滑らかであればあるほど，速く 0 に収束する.

上の結果は，展開係数の表式 (15′) を h 回部分積分すれば直接に得られる.

2.5.4　基本領域の伸縮

関数 $f(x)$ が周期 $2l$ の周期関数であるときは，展開

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu\cos\nu\frac{\pi}{l}x+b_\nu\sin\nu\frac{\pi}{l}x\right)$$

が可能である．ここに

$$a_\nu = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(t)\cos\nu\frac{\pi}{l}t\,dt, \quad b_\nu = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(t)\sin\nu\frac{\pi}{l}t\,dt.$$

これをまた

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x}, \quad \alpha_\nu = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(t)e^{-i\nu\frac{\pi}{l}t}\,dt$$

と書くこともできる．

2.5.5　いくつかの例

フーリエ級数論の簡単な例に関しては初等的な教科書にまかせよう[16]．ここではテータ関数の関数方程式，および一般のポアソン (Poisson) の公式を導くためにフーリエ展開を用いよう．

テータ関数

$$\vartheta(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\mu^2 x} \quad (x > 0)$$

の**関数方程式**は

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)$$

である．これを証明するために

$$\varphi(y) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\mu+y)^2 x}$$

とおく．$\varphi(y)$ は明らかに y について周期 1 の周期関数であり，y についてすべての導関数をもつ．従って，それはフーリエ級数

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{2\pi i\nu y}$$

に展開できる．ここに

16　［原註］たとえば R. Courant: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. 1, 2. Aufl., pp. 362–368, Berlin, 1930.

$$\alpha_\nu = \int_0^1 \varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_0^1 \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\mu+t)^2x-2\pi i\nu t}\,dt.$$

すべての $x>0$ について，和と積分の順序が交換できるから，係数 α_ν に対して次のように計算できる：

$$\alpha_\nu = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_0^1 e^{-\pi(\mu+t)^2x-2\pi i\nu(\mu+t)}\,dt = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_\mu^{\mu+1} e^{-\pi t^2x-2\pi i\nu t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2x-2\pi i\nu t}\,dt = e^{\frac{-\pi\nu^2}{x}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\left(t+\frac{i\nu}{x}\right)^2}\,dt = \frac{e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}}}{\sqrt{x}}.$$

なぜなら，積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz$ の値は，積分路を実軸に平行な $\mathrm{Im}(t)=\frac{\nu}{x}$ にとった場合と，積分路を実軸とした場合とでは同じ値 $\sqrt{\pi}$ をもっているからである．(それを確かめるには，関数 e^{-z^2} に対し，頂点 $-T$, $+T$, $+T+i\frac{\nu}{x}$, $-T+i\frac{\nu}{x}$ という矩形についてコーシー (Cauchy) の定理を用い，それから T を無限大にすると，垂直な部分からの寄与は 0 に収束する．被積分関数がそのとき一様に 0 に収束し，かつ積分路の長さは一定 $\frac{\nu}{x}$ だからである.)

このようにして

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}}e^{2\pi i\nu y}$$

が得られ，そこで $y=0$ とおくと求める等式

$$\vartheta(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\mu^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi\nu^2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)$$

となる．

以上では特別な場合に対して，無限級数の変形にフーリエ展開を用いたが，それによって例示されたこの方法は，最近，数論に現れる解析関数を取り扱うのに，非常に実り豊かなものであることが示されている．

上で用いられた考え方に従って，**ポアソンの和公式**と呼ばれる一般な，そうして非常に重要な無限級数の変換公式を導くことができる．いま無限級数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n)$ において，$\varphi(x)$ は連続な，かつ連続微分可能な x の関数であるとし，また，級数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n+t)$ および $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi'(2\pi n+t)$ は，区間 $0\leqq t<2\pi$ ですべての t について絶対かつ一様に収束するものとする．その

とき第2の級数は第1の級数の t についての導関数である．従って第1の級数は，区間 $0 \leqq t < 2\pi$ で収束するフーリエ級数に展開される．すなわち

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n+t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t}\int_0^{2\pi} e^{-i\nu\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n+\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(2\pi n+\tau)e^{-i\nu\tau}\,d\tau$$

と展開される．最後の辺の内側の和は次のように変形できる：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(2\pi n+\tau)e^{-i\nu\tau}\,d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\varphi(\tau)e^{-i\nu\tau}\,d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)e^{-i\nu\tau}\,d\tau.$$

ゆえに

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n+t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu t}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)e^{-i\nu\tau}\,d\tau.$$

最後に $t=0$ とおけば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)e^{-i\nu\tau}\,d\tau$$

が得られる．これがポアソンの公式である．なお，この公式が成り立つには，途中に現れるすべての積分が存在し，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n+t)$ が t について $0 \leqq t < 2\pi$ で一様に収束して，かつフーリエ級数に展開可能な関数でありさえすればよい．

2.6　フーリエ積分

2.6.1　主定理とその証明

区間 $-l < x < l$ で定義された関数 $f(x)$ のフーリエ級数

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\alpha_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x},\quad \alpha_\nu = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\nu\frac{\pi}{l}t}\,dt$$

において，$l \to \infty$ の極限移行を実行したい．それができれば，$f(x)$ を周期的に延長する必要がなくなり，従って，すべての実の x について定義された非周期的な関数に対する表現が得られるからである．ここで $f(x)$ は，これまでと同じく，任意の有限区間で区分的に滑らかな関数であり，その跳躍点での関数値は，右および左からの極限値の算術平均になっているとする．さらに積分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ が存在することを仮定する．

$\pi/l = \delta$ とおけば

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta \int_{-l}^{l} f(t) e^{-i\nu\delta(t-x)}\, dt$$

となる．ここで $l \to \infty$，すなわち $\delta \to 0$ となる極限を考える．公式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iu(t-x)}\, dt \tag{16}$$

が成り立つであろうと予想される．$f(x)$ が実関数ならば，上の式は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt \tag{17}$$

の形に書いてもよい．

このフーリエの**積分公式**を厳密に証明するには，上の極限移行を正当化するよりも，(16) あるいは (17) を直接に証明するのが良策である．

そのために，区分的に滑らかな任意の関数 $f(x)$ に対して成り立つ，次のディリクレ (Dirichlet) の積分公式[17]

$$\lim_{v\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} f(x+t) \frac{\sin vt}{t}\, dt = \frac{1}{2}\bigl[f(x+0) + f(x-0)\bigr] = f(x)$$

を出発点にとる．a は任意の正数である．これより次式が従う：

$$\begin{aligned}\pi f(x) &= \lim_{v\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x+t)\, dt \int_{0}^{v} \cos ut\, du \\ &= \lim_{v\to\infty} \int_{0}^{v} du \int_{-a}^{a} f(x+t) \cos ut\, dt\end{aligned}$$

---

[17] ［原註］この積分公式の証明については，通常はフーリエ級数理論の基礎としてもまた用いられる．微分積分学の教科書参照．たとえば，Courant, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., pp. 373. Berlin 1930.

$$= \int_0^\infty du \int_{-a}^{a} f(x+t)\cos ut\,dt.$$

ここで内側の t に関する積分域を $-\infty$ から $+\infty$ に拡げてよいことを示そう．まず，$A > a$ である A を任意にとれば

$$\int_0^v \int_{-A}^{A} - \int_0^v \int_{-a}^{a} = \int_0^v \int_{-A}^{-a} + \int_0^v \int_a^A = \int_{-A}^{-a} \int_0^v + \int_a^A \int_0^v .$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = C$ が存在するという仮定から次式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\left|\int_0^v \int_{-A}^{A} - \int_0^v \int_{-a}^{a}\right| &\leqq \left|\int_{-A}^{-a} f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt\right| + \left|\int_a^A f(x+t)\frac{\sin vt}{t}\,dt\right| \\ &\leqq \frac{1}{a}\left(\int_{-A}^{-a} |f(x+t)|\,dt + \int_a^A |f(x+t)|\,dt\right) \\ &\leqq \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|\,dt = \frac{C}{a}.\end{aligned}$$

ここで v を固定して，A を限りなく大きくすると

$$\left|\int_0^v \int_{-\infty}^{\infty} - \int_0^v \int_{-a}^{a}\right| \leqq \frac{C}{a}$$

となる．これから $v \to \infty$ の極限をとれば

$$\left|\lim_{v\to\infty} \int_0^v \int_{-\infty}^{\infty} - \pi f(x)\right| \leqq \frac{C}{a}$$

が得られる．右辺は a を然るべくとることによりいくらでも小さくできるから，求める公式 (17) が証明された．

積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos u(t-x)\,dt$ は u の偶関数であるから，上の等式を

$$\pi f(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt$$

という形に書きかえることができる．他方積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin u(t-x)\,dt$ は u の奇関数であるから，積分が収束するときには[18]

$$0 = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(t-x)\,dt$$

18　［原註］このことは $f(x)$ の連続点 x に対して成り立つ．不連続点に対しては，この積分が発散することは，たとえば，$|x| \leqq 1$ のとき $f(x)=1$, $|x|>1$ のとき $f(x)=0$ となる関数からわかる．

である．上の両式の差をとれば，連続点 x に対して

$$\pi f(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iu(t-x)}\,dt$$

が得られる．これが公式 (16) である．

2.6.2 多変数への結果の拡張

公式 (16) を繰り返し用いれば，**多変数の区分的に滑らかな関数に対して，その連続点において成り立つ類似の公式**が得られる．たとえば，

$$4\pi^2 F(x_1, x_2) = \iiiint F(t_1, t_2)e^{-i[u_1(t_1-x_1)+u_2(t_2-x_2)]}\,dt_1\,du_1\,dt_2\,du_2$$

が，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t_1, x_2)|\,dt_1 \quad \text{および} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, t_2)|\,dt_2$$

が存在するとの仮定のもとに成立する．さらに，一般に n 変数のときも

$$(2\pi)^n F(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} F(t_1, \ldots, t_n)e^{-i[u_1(t_1-x_1)+\cdots+u_n(t_n-x_n)]}\,dt_1\,du_1\,dt_2\,du_2\cdots dt_n\,du_n$$

が同様の仮定のもとで成り立つ．

ただし，積分の順序は上式最後の $2n$ 個の微分の順序に従うものとする．

2.6.3 反転公式

フーリエ積分の公式 (16) は

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt$$

とおけば，格別にきれいな形をとる．実際そのときには，相互的な 2 つの公式

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt,$$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iut}\,du$$

が成り立つのである．

これらの等式は，左辺を既知と考えると，いわゆる1対の積分方程式になっているから，それぞれが他方の解を与えており，その関係は完全に相互的である．また偶あるいは奇関数に対しては，それぞれ，実の等式

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(u) \cos ut \, du,$$

および

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(u) \sin ut \, du$$

が対応する．

多変数の関数に対しても同様な公式

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \cdots \int g(\xi_1, \dots, \xi_n) e^{i(\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)} \, d\xi_1 \cdots d\xi_n,$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)} \, dx_1 \cdots dx_n$$

が成り立つ．

2.7　フーリエ積分の例

2.7.1　偶関数・奇関数の場合のフーリエの積分公式

(17)
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos ux \, du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos ut \, dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin ux \, du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin ut \, dt \end{aligned}$$

は，関数の偶奇によって簡単になる．すなわち $f(x)$ が偶関数のときは

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ux \, du \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt$$

となり，$f(x)$ が奇関数のときには

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\,du \int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt$$

となる．

2.7.2　ディリクレの不連続因子

$f(x)$ が偶関数で

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \qquad (0 \leqq x < 1 \text{ のとき}), \\ f(x) &= \frac{1}{2} \qquad (x = 1 \text{ のとき}), \\ f(x) &= 0 \qquad (x > 1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

とする．そのとき

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du \int_0^1 \cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u \cos ux}{u}\,du$$

が成り立つ．上の最右辺の式は「ディリクレの不連続因子」と呼ばれるが，多くの問題で大いに役立つ．

2.7.3　指数因数の例

$x > 0$ に対して

$$f(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0)$$

ととろう．$x < 0$ に対して $f(x)$ を偶関数として延長するか，あるいは奇関数として延長するかに応じて，それぞれ

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\,du \int_0^\infty e^{-\beta t}\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta \cos ux}{\beta^2 + u^2}\,du$$

または

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\,du \int_0^\infty e^{-\beta t}\sin ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u \sin ux}{\beta^2 + u^2}\,du$$

の2通りの表式が得られる．第2の場合には $f(0)=0$ ととっておかねばならない．積分

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{\beta^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-\beta|x|}}{\beta} \quad (\beta > 0)$$

はラプラス (Laplace) の積分と呼ばれることがある．

2.7.4　変換で不変な関数

特に興味深い例は，関数

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

の場合である．このとき

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\cos ut\,dt = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

であるから，互いに他の解を与えている2つの積分方程式

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\cos ut\,dt = e^{-\frac{u^2}{2}},$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\cos ut\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\cos ut\,du = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

は完全に一致する．

2.8　ルジャンドルの多項式

2.8.1　ベキ関数 $1, x, x^2, \ldots$ の直交化によるルジャンドルの多項式の生成

x のベキ関数（累乗関数）$1, x, x^2, \ldots$ を与えられた基本領域 G，たとえば区間 $-1 \leqq x \leqq +1$ において，§2.1 の方法に従って直交化するとき，三角関数列よりも多くの点で簡単な完全直交系の例が得られる．その際，たとえば，x の最高次の係数が正であるとの条件を課すと，得られる正規直交多項

式の列は一意に定まる.

これらの多項式が定数因子を除けば, **ルジャンドル** (Legendre) **の多項式**[19]と呼ばれる多項式

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

に一致することを示そう. 直交化の方法が示すように, あらゆる次数の多項式が登場するような直交多項式の系は, 定数因数を除けば1つしかないから, $P_n(x)$ が n 次式であること, および $P_n(x)$ の系が直交性をもっていることを示せば十分である. $P_n(x)$ が n 次の多項式であることは明らかである. 実際

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\frac{(2\nu)!}{(2\nu-n)!}x^{2\nu-n} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{(n-\nu)!(2\nu-n)!2^{n-\nu}}x^{2\nu-n}. \end{aligned}$$

上において x の負ベキの項は除外されるものとする. 従って, 実際に登場する最低次の項は, n が偶数のときは

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n}$$

であり, n が奇数のときは

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}x\frac{1\cdot3\cdot5\cdots n}{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}$$

である. ルジャンドルの多項式の最初のいくつかの式を示せば

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, & P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, & P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

$P_n(x)$ が直交系をなすことの証明に入ろう. 簡単のために $(x^2-1)^n = u_n(x)$ とおく. そのとき, 任意の負でない整数 $m < n$ に対して

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)x^m\,dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x)x^m\,dx = 0$$

[19] [原註] Legendre, A.M.: Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, 1785. ——Recherches sur la figure des planètes. Mém. math. phys., tirés des reg. de l'Acad. ec., pp. 370–389. 1784 (1787).

が成り立つ．これを確かめるためには，部分積分を繰り返すことによって x^m の次数を下げていき，かつ，その際に $u_n(x)$ の $(n-1)$ 次までの導関数が積分区間の両端で 0 になることに注意すればよい．これから

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad (m < n)$$

であること，すなわち，2 つの異なる多項式は互いに直交することが導かれる．正規化するには，$\int_{-1}^{1}[u_n^{(n)}(x)]^2\,dx$ の部分積分を次のように繰り返す：

$$\int_{-1}^{1} u_n^{(n)}u_n^{(n)}\,dx = -\int_{-1}^{1} u_n^{(n-1)}u_n^{(n+1)}\,dx = \int_{-1}^{1} u_n^{(n-2)}u_n^{(n+2)}\,dx = \cdots$$
$$= (-1)^n\int_{-1}^{1} u_n u_n^{(2n)}\,dx = (2n)!\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\,dx.$$

ところが，

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\,dx = \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}\,dx = \cdots$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots 2n}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}\,dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}2^{2n+1}$$

であるから，

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

となる．ゆえに，求める正規化された多項式は次の形をとる：

$$\varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}P_\nu(x)$$
$$= \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}\frac{1}{2^\nu\nu!}\frac{d^\nu(x^2-1)^\nu}{dx^\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ は

$$P_n(1) = 1$$

という性質をもっている．これは $(x-1)^n(x+1)^2$ の n 次導関数をライプニッツ (Leibniz) の公式によって計算し，$x=1$ とおけばすぐにわかる．

2.8.2 母関数

ルジャンドルの多項式はポテンシャル論において特に重要である．そこではルジャンドルの多項式は，ある**母関数**の展開係数として登場する．すなわち，原点からの距離がそれぞれ 1 および $u<1$ である 2 点をとり，それらの位置ベクトルがなす角を $\arccos x$ とおく．そうしてこの 2 点間の距離の逆数，すなわち $1/\sqrt{1-2ux+u^2}$ を u のベキに展開すれば，二項定理によって次式が得られる：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)u^n. \tag{18}$$

ここに $Q_n(x)$ は x の n 次の多項式である．これらの多項式 $Q_n(x)$ が上に定義したルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ と一致することを，$Q_n(x)$ が $P_n(x)$ と同じ直交関係を満たすことを証明することによって示そう．定義式 (18) から次の等式が成り立つ：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}}=\sum_{n,m=0}^{\infty}Q_n(x)Q_m(x)u^nv^m.$$

左辺を x について -1 から $+1$ まで積分すれば，初等的な計算によって

$$\frac{1}{\sqrt{uv}}\log\frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}u^nv^n$$

となる．従って，右辺を項別に積分し，u^nv^m の係数を比較すれば，

$$\int_{-1}^{+1}Q_n(x)Q_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & (n\neq m\text{ のとき})\\[2mm] \dfrac{2}{2n+1} & (n=m\text{ のとき})\end{cases}$$

が得られる．さらに等式 (18) において，$x=1$ とすれば $Q_n(1)=1$ も得られる．以上から $Q_n(x)$ が $P_n(x)$ に等しいことが証明された．

2.8.3 その他の性質

漸化式．母関数を u について積分すれば，連続した 3 つのルジャンドルの多項式に対する漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{19}$$

が直ちに得られる．

微分方程式．n 次のルジャンドルの多項式

$$y(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

は 2 階の線形同次微分方程式

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0, \tag{20}$$

すなわち

$$\left[(x^2-1)y'\right]' - n(n+1)y = 0 \tag{20'}$$

を満たす．これを見るのには $u = (x^2-1)^n$ とおいて等式 $(x^2-1)u' = 2nxu$ を $(n+1)$ 回微分し，そこで $u^{(n)} = 2^n n! y$ とおけばよい[20]．

最小性．ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ に x^n の係数の逆数 C を掛けて，$CP_n(x)$ の x^n の係数を 1 にすると，この多項式は次の最小性によって完全に特徴づけられる．すなわち，これは最高次の係数が 1 である実係数の n 次多項式のうちで，2 乗平均の意味で 0 に最も近いものである．このことの証明は，次の考察から簡単に得られる．すなわち積分 $\int(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)^2\,dx$ に関し，その被積分関数は線形結合 $(CP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\cdots+c_0)^2$ で表わされるから，積分値は $\frac{2C^2}{2n+1}+2\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{c_\nu^2}{2\nu+1}$ に等しい．これは $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ のときに最小になる．

2.9　その他の直交系

2.9.1　ルジャンドルの多項式を導いた問題設定の一般化

ルジャンドルの多項式の導入への出発点となった問題は次のように一般化

---

[20] ［原註］この微分方程式からたとえば次のことが導かれる．$P_n(x)$ の零点は，定義およびロル (Rolle) の定理から，すべての実根は $-1 < x < 1$ なる区間内にあるが，それらはすべて単根である．なぜなら，もし重根があるなら，微分方程式から，その点で y'' もまた 0 となり，さらには $P_n(x)$ のすべての次数の導関数がこの点で 0 となってしまうからである．

される.

区間 $a \leqq x \leqq b$ において，負でない「重み関数」$p(x)$ が与えられているとせよ[21]．関数 $\sqrt{p(x)}$, $x\sqrt{p(x)}$, $x^2\sqrt{p(x)}$, ... を区間 $a \leqq x \leqq b$ において直交化して得られる関数系を調べるのが課題である．

もちろん上の関数は，ベキ関数 $1, x, x^2, \ldots$ と同様に線形独立である．また直交化された系の関数において，因数 $\sqrt{p(x)}$ へ掛けられる次数 $0, 1, \ldots$ の多項式 $Q_0(x), Q_1(x), \ldots$ は，適当な正規化の付加条件によって一意的に決定される．これらの多項式は**重み $p(x)$ に属する直交多項式**と呼ばれる[22]．

得られる直交多項式の例を挙げよう：

$a = -1, b = 1, p(x) = 1$ に対しては，ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$,

$a = -1, b = 1, p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ に対しては，**チェビシェフ** (Tschebyscheff) **の多項式**

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

$a = -1, b = 1, p(x) = \sqrt{1-x^2}$ に対しては，多項式

$$Q_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

$a = 0, b = 1, p(x) = (1-x)^p(1+x)^q \ (p > -1, q > -1)$ に対しては，**ヤコビ** (Jacobi) **の多項式**または**超幾何多項式**,

$a = -\infty, b = \infty, p(x) = e^{-x^2}$ に対しては，**エルミートの多項式**,

$a = 0, b = \infty, p(x) = e^{-x}$ に対しては，**ラゲール** (Laguerre) **の多項式**,

---

21 ［訳註］実際は，区間の端点を除いて正である $p(x)$ を考えている．

22 ［原註］多項式 $Q_0(x), Q_1(x), \ldots$ は適当な乗数 C を掛けたとき，ルジャンドルの多項式と同様な最小性をもつ．すなわち，それは実係数の最高次の係数が 1 である多項式の中で，積分

$$\int p(x)(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)^2 \, dx$$

を最小にする．この場合もまた被積分関数が多項式 $Q_n(x)$ を用いて

$$p(x)(CQ_n(x) + c_{n-1}Q_{n-1}(x) + \cdots + c_0)^2$$

の形に表わされ，関数 $\sqrt{p(x)}Q_n(x)$ の直交性から，積分値は $C^2 + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu^2$ となる．よって，その最小値は $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ のとき到達される．

がそれぞれ得られる．

これらのうち，チェビシェフ，ヤコビ，エルミート，ラゲールの多項式については，少々詳しく考察しよう．

2.9.2　チェビシェフの多項式

チェビシェフの多項式[23]

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad (n \geqq 1)$$

は[24]，関係式

$$2\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2^{n+m-2}} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = 0 \qquad (n \neq m)$$

によれば明らかに，区間 $-1 \leqq x \leqq +1$ における重み $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ のもとでの直交系である．この多項式は次のように特徴づけることもできる：n 次の実係数の多項式であり，かつ最高次の係数が 1 であるもののうちで，0 との偏差[25]，すなわち，区間 $-1 \leqq x \leqq +1$ における絶対値の最大値が最小であるものが $T_n(x)$ である．

このことを示そう．簡単のために，$\arccos x = \theta$, $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ とおけば

$$\begin{array}{llllll} \theta = 0, & \dfrac{\pi}{n}, & \dfrac{2\pi}{n}, & \ldots, & \pi: & \text{において} \\ T_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}, & \dfrac{-1}{2^{n-1}}, & \dfrac{1}{2^{n-1}}, & \ldots, & \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}} & \end{array}$$

---

23 ［原註］Tschebyscheff, P.L.: Sur les questions de minima, qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. Mém. Acd. sc. Pétersb., Serie 6, Bd. 7, pp. 199–291. 1859. ——Œuvres, Bd. 1, pp. 271–378, 特に pp. 295–301. St. Petersburg 1899.

24 ［原註］よく知られた公式

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \cdots$$

によって，この式は x の多項式である．

25 ［訳註］現代風にいえば区間 $[-1, 1]$ 上の最大値ノルム．

となる．すなわち

$$T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

これらの点で $T_n(x)$ の絶対値が最大となり，0 との偏差を実現している．もし区間 $-1 \leqq x \leqq +1$ における実係数の多項式 $R_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ と 0 との偏差の差が $T_n(x)$ のそれよりも小さいとすれば

$$T_n(x_0) - R_n(x_0) \geqq 0, \quad T_n(x_1) - R_n(x_1) \leqq 0, \quad T_n(x_2) - R_n(x_2) \geqq 0, \ \ldots$$

でなければならない．従って多項式 $T_n(x) - R_n(x)$ は区間 $-1 \leqq x \leqq +1$ 内に少なくとも n 個の根をもたなければならない．しかしこれは，式の次数が高々 $(n-1)$ だから $T_n(x) - R_n(x) \equiv 0$ の場合を除いて不可能である．

正規化された多項式は $T_n(x)$ を

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2^{2n-1}}}$$

で割ることによって得られる．

チェビシェフの多項式は次の**母関数**の展開係数としても得られる：

$$\psi(x,t) = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)(2t)^n. \tag{21}$$

$n \geqq 2$ に対しては，連続した 3 つの多項式は，漸化式

$$T_{n+1}(x) - xT_n(x) + \frac{1}{4} T_{n-1}(x) = 0 \tag{22}$$

を満たし，それぞれが 2 階の線形同次微分方程式

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{23}$$

を満たす．$n < 2$ に対しての漸化式は少々異なった，次の形になる：

$$\begin{aligned} T_2 - xT_1 + \frac{1}{4}T_0 &= -\frac{1}{4}, \\ T_1 - xT_0 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

2.9.3 ヤコビの多項式

ヤコビの多項式[26] $G_n(p,q,x)$ は $a=0,\ b=1$，かつ重み関数が

$$p(x)=x^q(1-x)^{p-q} \quad ただし \quad q>-1,\ p-q>-1$$

であるとして得られる．これは超幾何級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots \tag{24}$$

から，β を負整数 $-n$, α を $p+n$, γ を q と，それぞれおきかえても得られる．

従って超幾何微分方程式

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0 \tag{25}$$

を，いまの場合に特化すれば，G_n は

$$x(1-x)G_n''(x)+[q-(p+1)x]G_n'(x)+(p+n)nG_n(x)=0 \tag{25$'$}$$

を満たす．しかもこの微分方程式に対して G_n は（定数因数を除いて）唯一の有理整関数解である．

ヤコビ多項式の最初のいくつかを書き示そう．

$$\begin{aligned}
G_0(p,q,x)&=1,\\
G_1(p,q,x)&=1-\binom{1}{1}\frac{p+1}{q}x,\\
G_2(p,q,x)&=1-\binom{2}{1}\frac{p+2}{q}x+\binom{2}{2}\frac{(p+2)(p+3)}{q(q+1)}x^2,\\
G_3(p,q,x)&=1-\binom{3}{1}\frac{p+3}{q}x+\binom{3}{2}\frac{(p+3)(p+4)}{q(q+1)}x^2,\\
&\qquad -\binom{3}{3}\frac{(p+3)(p+4)(p+5)}{q(q+1)(q+2)}x^3.
\end{aligned}$$

一般に

---

[26] ［原註］Jacobi, C.G.J.: Untersuchungen über die Differentialgleichungen der hypergeometrischen Reihe. J. reine angew. Math., Bd. 56, S. 149–165. 1859.

$$G_n(p,q,x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{q+n-1}(1-x)^{p+n-q}\right]$$

と表わされる．上の表式から，次の母関数による定義式も導かれる：

$$\frac{(1-x)^{1-q}(1+x)^{q-p}\left(t-1+\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{q-1}\left(t+1-\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{p-q}}{t^{p-1}\sqrt{1-2tx+t^2}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{q+n-1}{n}G_n\left(p,q,\frac{1-x}{2}\right)t^n.$$

ヤコビ多項式において，$p=q=1$ のときは，ルジャンドルの多項式

$$P_n(x) = G_n\left(1,1,\frac{1-x}{2}\right) = F\left(n+1,-n,1,\frac{1-x}{2}\right) \tag{26}$$

が，また $p=0$, $q=\frac{1}{2}$ のときは本質的にチェビシェフの多項式が得られる．

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}G_n\left(0,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}F\left(n,-n,\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right). \tag{27}$$

2.9.4 エルミートの多項式

エルミートの多項式[27] $H_n(x)$ は，$a=-\infty$, $b=\infty$，かつ $p(x)=e^{-x^2}$ とした場合に得られるが，これは母関数

$$\psi(x,t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2}e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \tag{28}$$

を用いて定義するとなお都合がよい．これより，

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n\psi(x,t)}{\partial t^n}\right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \tag{29}$$

がすぐに導かれる．すなわち n 次のエルミートの多項式 $H_n(x)$ は関数 e^{-x^2} の n 次導関数に $(-1)^n e^{x^2}$ を掛けたものである．関係式 $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} = 2t\psi(x,t)$ から，

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geqq 1) \tag{30}$$

27 ［原註］Hermite, Ch.: Sur un nouveau développement en série de fonctions. C. R. Acad. Sc. Paris Bd. 58, pp. 93–100, pp. 266–273.

が得られ，関係式 $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = 2(t-x)\psi(x,t)$ からは

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geqq 1) \tag{31}$$

が得られる．さらに以上の両式をあわせて用いると，$H_n(x)$ に対する2階線形同次微分方程式

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (n \geqq 0) \tag{32}$$

が得られる．エルミートの多項式の最初のいくつかを示せば

$$\begin{aligned} &H_0(x) = 1, & &H_1(x) = 2x, \\ &H_2(x) = 4x^2 - 2, & &H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ &H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

一般のエルミートの多項式 $H_n(x)$ は

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \cdots$$

と表わされるが，その最後の項は

$$+(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \qquad (n \text{ が偶数のとき}),$$

$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} 2x \qquad (n \text{ が奇数のとき})$$

となる．

エルミートの多項式の直交性を示すのには，$n > m$ のとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\,dx$$

であること，式(30)，および x^2 が無限大になるとき e^{-x^2} のすべての微係数が0になることに留意して部分積分を繰り返せばよい[28]．実際，

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = (-1)^{n-1}2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}\,dx = \cdots$$

28 ［原註］母関数を利用して直交性を証明することも容易である．

$$= (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m} e^{-x^2}}{dx^{n-m}}\, dx = 0.$$

正規化するためには，$n = m$ に対して同様に計算を進め

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x) e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

を得る．すなわち，正規直交系をなす関数は

$$\varphi_\nu(x) = \frac{H_\nu(x) e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2^\nu \nu! \sqrt{\pi}}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

である．

2.9.5 ラゲールの多項式

ラゲールの多項式[29] $L_n(x)$ $(a = 0,\ b = +\infty,\ p(x) = e^{-x})$ は，関数 $x^n e^{-x}$ の n 次の導関数における e^{-x} の因数である：

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(k+1) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{[n(n-1)\cdots(n-k+1)]^2}{k!} x^{n-k} \\
&= (-1)^n \left(x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n n! \right).
\end{aligned}$$

これより，たとえば，

$$L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = -x + 1,$$
$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2, \qquad L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$

29 ［原註］Laguerre, E.: Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$. Bull. Soc. math. France Bd. 7, pp. 72–81. 1879.

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24.$$

さて，関係式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k!} x^k t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} t^n$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}$$

が成り立つことから，ラゲールの多項式もまた簡単な母関数，すなわち $\psi(x,t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}$ をもつことがわかる．母関数についての関係

$$(1-t)^2 \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = (1-t-x)\psi(x,t)$$

からは，漸化式

$$L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geqq 1) \tag{33}$$

が得られる．さらに，$(1-t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = -t\psi(x,t)$ から導かれる関係式

$$L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) = -nL_{n-1}(x) \quad (n \geqq 1) \tag{34}$$

と上の漸化式とをあわせて用いれば，公式

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (n \geqq 1) \tag{35}$$

およびラゲールの多項式 $L_n(x)$ が満たす2階線形同次微分方程式

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{36}$$

が導かれる．

直交性

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0 \quad (n > m)$$

は次の計算によって示される：

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^k L_n(x)\, dx$$
$$= \int_0^{\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\, dx = -k \int_0^{\infty} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})\, dx$$

$$= k(k-1)\int_0^\infty x^{k-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^n e^{-x})\,dx = \cdots$$
$$= (-1)^k k!\int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n e^{-x})\,dx = 0 \quad (n > k \text{ のとき}).$$

一方，正規化するために必要な積分の計算は，

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)\,dx = \int_0^\infty (-1)^n x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\,dx$$
$$= n!\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = (n!)^2$$

である．これより関数

$$\varphi_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}L_\nu(x)}{\nu!} \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

が正規直交系を与える[30]．

2.9.6 ラゲールの多項式およびエルミートの多項式の完全性

ラゲールおよびエルミート関数の完全性については，特別な考察が必要である．なぜなら，これまでのところ多項式などの完全性は，有限区間の場合についてだけ証明されたのであったから．定義として，区間 $0 \leqq x < \infty$ における関数系が完全であると呼ばれるのは，区分的に連続で，積分 $\int_0^\infty f(x)^2\,dx$ が存在するような任意の関数 $f(x)$ が，この関数系の関数の線形結合によって，平均の意味でいくらでもよく近似できることである．

ラゲールの直交関数の完全性を示すために[31]，恒等式

$$\psi(x,t) = \frac{1}{1-t}e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}L_n(x)$$

の両辺に $e^{-\frac{x}{2}}$ を掛けることにより，ラゲールの直交関数

$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{x}{2}}\frac{L_n(x)}{n!}$$

に関する恒等式

---

30 ［原註］関数 φ_ν の直交性はここでも母関数を使っても得られる．

31 ［原註］J. フォン・ノイマン (J. von Neumann) 氏からの個人的な手紙による．

$$g(x,t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{1}{2}\frac{1+t}{1-t}x} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x)$$

が導かれる．$|t| < 1$ とすれば，無限級数 $\sum t^n \varphi_n(x)$ は，平均の意味で母関数 $g(x,t)$ に収束する．このことは，直交性に基づく等式

$$\int_0^\infty g^2(x,t)\,dx = \frac{1}{1-t^2},$$
$$\int_0^\infty g(x,t)\varphi_n(x)\,dx = t^n$$

を用いて行う積分の変形

$$\int_0^\infty \left(g(x,t) - \sum_{n=0}^{N} t^n \varphi_n(x)\right)^2 dx = \frac{1}{1-t^2} - \sum_{n=0}^{N} t^{2n}$$

から直ちに得られる．$\alpha = \frac{1}{2}\frac{1+t}{1-t}$ は t が -1 から $+1$ まで変わるとき，0 と ∞ との間のすべての値をとる．ゆえに $0 < \alpha < \infty$ なる任意の定数 α に対して関数 $e^{-\alpha x}$ は，ラゲールの直交関数により，区間 $0 \leqq x < \infty$ において平均の意味でいくらでもよく近似できる．さて，関数 $f(x)$ が区間 $0 \leqq x < \infty$ で区分的に連続で，2乗可積分であるとしよう．$\xi = e^{-x}$ とおけば，$f(x)$ は区間 $0 \leqq \xi \leqq 1$ で区分的に連続な ξ の関数となり，ワイエルシュトラスの定理から，この区間において多項式

$$a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n$$

によって一様に近似される．このことから，$f(x)$ は

$$a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} + \cdots + a_n e^{-nx}$$

という形の式により区間 $0 \leqq x < \infty$ で一様に近似することができる．従って，上に述べた結果から，$f(x)$ がラゲールの直交関数によって平均近似される可能性が導かれるのである[32]．この事実は完全性の等式（パーセバルの等式）

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2 = \int_0^\infty f^2(x)\,dx$$

32 ［訳註］原著におけるこの部分の論法にはギャップがある．$0 \leqq x < \infty$ における一様収束は平均収束を意味しないゆえ，f を十分遠方で cut off した関数 $\tilde{f}$ をラゲール直交関数で近似するのであるが，詳細は割愛する．

と同値である．ここで c_ν は展開係数 $c_\nu = \int_0^\infty f(x)\varphi_\nu(x)\,dx$ である．

ラゲールの直交関数のそれに基づいてエルミート直交関数の完全性を示すことができる[33].

2.10　第 2 章への補足と問題

2.10.1　等周問題のフルヴィッツの解

等周問題とは，周長が一定である平面の単純閉曲線のうちで，最大面積を囲むものを見出す問題である．円がその解であることはよく知られている．これを証明するのであるが，フルヴィッツ (Hurwitz)[34]に従って，対象とする曲線を区分的に滑らかなものに限ろう．

すなわち

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leqq s \leqq L)$$

を閉じた，連続かつ区分的に滑らかな，長さ L をもち，面積 F を囲む曲線の，孤長 s をパラメータとした媒介変数表示であるとする．s の代わりに新しいパラメータとして $t = \frac{2\pi s}{L}$ を導入すると，s が 0 から L まで変わる間に，t は 0 から 2π まで変わる．x および y のフーリエ係数をそれぞれ a_ν, b_ν および c_ν, d_ν と表わせば，$\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ のフーリエ係数は νb_ν, $-\nu a_\nu$ および νd_ν, $-\nu c_\nu$ となる．関係式

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2,$$

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

に基づき，完全性関係 (9)，あるいは (9′) から

$$2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}dt = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2(a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2 + d_\nu^2),$$

---

33 ［訳註］詳細は割愛するが，$-\infty < x < \infty$ 上の関数を偶関数と奇関数の和に表現し，変数変換 $x^2 = u$ を伴なう工夫が必要である．

34 ［原註］Hurwitz, A.: Quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. École. Norm. Serie 3, Bd 19, pp. 357–408，特に pp. 392–397.

$$\frac{F}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\frac{dy}{dt}\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu)$$

が得られる．さらにすぐ上から不等式

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(\nu a_\nu - d_\nu)^2 + (\nu b_\nu + c_\nu)^2 + (\nu^2-1)(c_\nu^2 + d_\nu^2)\right] \geqq 0$$

が導かれる．ここで等号が成立するのは，

$$b_1 + c_1 = 0, \quad a_1 - d_1 = 0, \quad a_\nu = b_\nu = c_\nu = d_\nu = 0 \quad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

のときである．そのときは

$$x = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos t + b_1\sin t,$$
$$y = \frac{1}{2}b_0 - b_1\cos t + a_1\sin t$$

であり，曲線は円となる．以上により，平面におけるすべての区分的に滑らかな単純閉曲線に対して，その周長 L と面積 F の間には「等周不等式」

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0 \tag{37}$$

が成り立つ．そうして等号は曲線が円のとき，かつそのときに限り成り立つのである．こうして円の「等周性」が示された．

2.10.2　反転公式

次の 2 つの公式[35]

$$f(t) = \int_0^1 g(u)\cot\pi(t-u)\,du,$$
$$-g(u) = \int_0^1 f(t)\cot\pi(u-t)\,dt$$

の同値性を，仮定

$$\int_0^1 g(u)\,du = 0, \qquad \int_0^1 f(t)\,dt = 0,$$

35 ［原註］Hilbert, D.: Integralgleichungen, p. 75.

$$g(u) = g(u+1), \qquad f(t) = f(t+1)$$

のもとに証明せよ．ただし積分は「コーシーの主値」をとるものとする．証明にはまずフーリエ級数論を用い，次にはコーシーの積分定理を用いてみよ．

2.10.3　フーリエ積分と平均収束

フーリエ級数論と同様に，フーリエ積分論を，平均収束と完全性に基づいて展開することができる．

実数値あるいは複素数値をとる関数 $f(x)$ が任意の有限区間では区分的に連続であり，かつ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{および} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx$$

が存在するものとしよう．いま，$f(x)$ を

$$\int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{ixt}\, dt$$

という形の積分によって平均収束の意味でできるだけよく近似すること，すなわち，積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{ixt}\, dt \right|^2 dx$$

を，一定の T に対して最小にすることを目指すのである．そこで

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi$$

とおけば，それほど難しくはない変形によって，等式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \int_{-T}^{T} \varphi(t) e^{ixt}\, dt \right|^2 dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx + 2\pi \int_{-T}^{T} |\varphi(x) - g(x)|^2\, dx - 2\pi \int_{-T}^{T} |g(x)|^2\, dx$$

が得られ，問題の積分は

$$\varphi(t) = g(t)$$

のとき最小値をとることが示される．なお，$T \to \infty$ の極限移行に対しては，完全性関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx$$

が成り立つ．

この事実の証明およびフーリエ積分論本来の諸定理の記述に立ち入ることはここでは控えておこう．

2.10.4　フーリエ級数およびフーリエ積分によるスペクトル分解

フーリエ級数やフーリエ積分は，与えられた現象あるいは関数の変動を，周期的な現象あるいは周期関数の変動の重ね合わせとして表わそうとする場面において常に登場する．すなわち，与えられた現象や関数を，いわゆるスペクトルに分解しようとする場面においてである．$f(x)$ が区間 $-l \leqq x < l$ において与えられた関数であり，$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{\frac{i\pi\nu x}{l}}$ をそのフーリエ級数とする．このとき関数 $f(x)$ は「離散周波数」$\frac{\nu\pi}{l}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ をもつ周期関数に分解され，その「振幅」は

$$|\alpha_\nu| = \left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{i\pi\nu x}{l}}\,dx\right|$$

であるという．これに対して，考える領域が無限領域 $-\infty < x < +\infty$ であるならば，$f(x)$ は**連続スペクトル**に分解されるといい，周波数 u に対する**スペクトル密度**は $g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx$ であるという．

物理学において格別の興味を引く例[36]は

$$f(x) = e^{i\omega x} \quad (|x| < l),$$
$$f(x) = 0 \qquad (|x| > l)$$

で与えられる関数である．これは正弦波から切り取られた，波数 $n = \frac{l\omega}{\pi}$ の波の連なりに対応している．そのスペクトル密度は

36　［原註］この例は，光学的には有限で切れる正弦波は決して鋭いスペクトル線がなく，有限の幅のスペクトルをもち，波数が多ければ多いだけ，狭く，強くなるという事実を示している．

$$g(u) = \int_{-l}^{l} e^{i(\omega-u)x}\,dx = \frac{2\sin(\omega-u)l}{\omega-u}$$

で与えられる．u の関数と考えたとき $|g(u)|$ は $u=\omega$ で最大値をとり，波数 n が大きくなればそれだけ最大がきわだっている．n を大きくしていけば，任意に小さい区間 $\omega-\delta \leqq u \leqq \omega+\delta$ を固定するとき，その区間外にあるすべての点 u におけるスペクトル密度は相対的にいくらでも小さくなる．

2.10.5 密な関数系

ミュンツ (Müntz) に従えば，関数系は次の性質をもつとき密であるという．すなわち，この関数系の有限個の関数によって平均収束の意味で近似できるような関数 $f(x)$ は，もとの関数系の任意の無限部分集合に属する関数によっても，やはり平均収束の意味で同じように近似できるときである．このような系の自明な例としては，すべて等しい関数からなる系がある．極めて注目すべきことに，自明でない関数系の存在が，セゲー (Szegö)[37]によれば，次の定理に基づいて示されるのである．

《定理》 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ を正の数で n とともに ∞ に増大する数列とする．関数

$$\frac{1}{x+\lambda_1},\ \frac{1}{x+\lambda_2},\ \ldots,\ \frac{1}{x+\lambda_n},\ \ldots$$

は任意の正の有限区間において，完全な関数系をなす．□

この定理から，この系が密であることが導かれる．実際，λ_n の任意の部分列は，また，定理の要求する条件を満たしているからである．

上の定理を示すのには，ワイエルシュトラスの近似定理を考慮するとき，任意のベキ x^m が関数 $\frac{1}{x+\lambda_n}$ によって一様に近似できることを示せば十分である．有理関数

$$x^m \frac{\lambda_p \lambda_{p+1} \cdots \lambda_q}{(x+\lambda_p)(x+\lambda_{p+1})\cdots(x+\lambda_q)}$$

は，$q \geqq p$ を保ちながら p が増大するとき x^m に収束し，しかも，収束は任

---

[37] ［原註］Szegö, G.: Über dichte funktionefamilien. Berichte der sächs Akad. der Wiss. zu Leipzig. Bd. 78. 1926.

意の正の有限区間において一様である．常に $q-p \geqq m$ が成り立つように p, q を選べば，λ_n は互いに等しくないと仮定してもよいので，この有理関数は次の形の部分分数展開：

$$\frac{A_p}{x+\lambda_p} + \frac{A_{p+1}}{x+\lambda_{p+1}} + \cdots + \frac{A_q}{x+\lambda_q}$$

の形に表わされる．ここで A_p, A_{p+1}, ..., A_q は定数である．これは，定理における関数系に属する関数の線形結合にほかならない．

密な関数系の他の例をミュンツ[38]が与えている．

2.10.6　ベキ関数の完全性に関するミュンツの定理

ミュンツ[39]は次の興味深い定理を与えている：ベキ関数の無限列 $1, x^{\lambda_1}$, $x^{\lambda_2}, \ldots$ の指数 λ_ν が正で $+\infty$ に発散するとする．この場合，$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu}$ が発散するとき，かつそのときに限り，この関数系は区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において完全である．

2.10.7　フェイェールの和定理

ワイエルシュトラスの近似定理から任意の連続な周期関数は三角多項式により，一様に近似できるという結論を導いたのであった．このような多項式は，次のフェイェール (Fejér) が見出した定理[40]に基づいた簡単な方法により得られる．

《定理》 $f(x)$ が連続な周期関数であり，$s_n(x)$ をそのフーリエ級数の部分和とすれば，$s_n(x)$ の算術平均の列

38　［原註］Müntz, H.: Dichte Funktionensysteme. Math. Zeitschrift Bd. 21. 1924.

39　［原註］Müntz, H.: Über den approximationssatz von Weierstrass. Festschrift H.A. Schwarz 1914, p. 303. — Szász, O.: Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen. Math. Ann. Bd. 77, 1926.

40　［原註］Fejér, L.: Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann. Bd. 58. 1904.

$$S_n(x)=\frac{s_1(x)+s_2(x)+\cdots+s_n(x)}{n}=\frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt$$

は $f(x)$ に一様に収束する．□

同様な定理が，フーリエ積分に関しても成り立つ．すなわち，$f(x)$ が任意の有限部分領域で連続で $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ が存在するとする．このとき，

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-ix\xi}\,d\xi$$

および

$$s_T(x)=\int_{-T}^{T}g(t)e^{ixt}\,dt$$

とおけば，算術平均の列

$$S_T(x)=\frac{1}{T}\int_0^T s_T(x)\,dT=\frac{2}{\pi T}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{Tt}{2}}{t}\right)^2dt$$

は任意の有限部分区間で $f(x)$ に一様収束する．特に，もし $f(x)$ が区間 $-\infty<x<+\infty$ で一様連続ならば，収束はそこで一様である．

2.10.8　メリンの反転公式

《定理》[41] $s=\sigma+ti$ を複素変数とする．帯状領域 $\alpha<\sigma<\beta$ において関数 $f(s)$ は正則であり，かつ，そこで $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma+ti)|\,dt$ は収束するとする．さらに任意のせばめられた帯状領域 $\alpha+\delta\leqq\sigma\leqq\beta-\delta$（$\delta>0$ は任意に固定）において，座標 t の絶対値が増大するにつれて，関数 $f(s)$ は 0 に一様収束すると仮定する．このとき，正の実数 x と定まった σ に対して

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}x^{-s}f(s)\,ds \tag{38}$$

[41] ［原註］Mellin, H.: Über den Zusammenhang zwischen den Linearen Differential- und Differenzengleichungen. Acta math. Bd. 25, pp. 139–164，特に pp. 156–162, 1902. —— Fujiwara, M.: Über Abelsche erzeugende Funktionen und Darstellbarkeitsbedingungen von Funktionen durch Dirichletsche Reichen. Tôhoku math. J. Bd. 17, pp. 363–383, 1920. —— Hamburger, H.: Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Erste Mittelung). Math. Ztschr. Bd. 10, pp. 240–254，特に pp. 242–247, 1921.

とおけば，帯状領域 $\alpha < \sigma < \beta$ において

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} g(x)\,dx \tag{39}$$

が成り立つ．□

証明　$\alpha+\delta \leqq \sigma \leqq \beta-\delta$ に対し $|t| \to \infty$ のとき，$f(s)$ が 0 に一様に収束するので，(38) における，積分路直線を平行にずらすことができる．従って $g(x)$ は σ に関係しない．よって，2 つの横座標 σ_1, σ_2 を $\alpha < \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 < \beta$ を満たすように選べば，次式が成り立つ：

$$\int_0^\infty x^{s-1} g(x)\,dx = \int_0^1 x^{s-1}\,dx \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1+\infty i} x^{-s_1} f(s_1)\,ds_1 + \int_1^\infty x^{s-1}\,dx \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\infty i}^{\sigma_2+\infty i} x^{-s_2} f(s_2)\,ds_2 = J_1 + J_2.$$

上の積分においては，積分の順序を入れ換えてよい．それは

$$|J_1| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |f(\sigma_1 + ti)|\,dt \int_0^1 x^{-1+(\sigma-\sigma_1)}\,dx,$$
$$|J_2| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |f(\sigma_2 + ti)|\,dt \int_1^\infty x^{-1+(\sigma-\sigma_2)}\,dx$$

という評価により，積分が絶対収束であることによる．従って

$$\int_0^\infty x^{s-1} g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\infty i}^{\sigma_2+\infty i} \frac{f(s_2)}{s_2 - s}\,ds_2 - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1+\infty i} \frac{f(s_1)}{s_1 - s}\,ds_1$$

となる．コーシーの積分公式によれば，右辺の差は確かに $f(s)$ に等しい．なぜなら，鉛直な 2 直線 $s = \sigma_1$, $s = \sigma_2$ との間を水平に結ぶ線分上の積分は，$|t| \to \infty$ のとき $f(s) \to 0$ となることから，0 に収束するからである．□

《定理》 $x > 0$ において $g(x)$ は区分的に滑らかで，かつ $\alpha < \sigma < \beta$ に対して $\int_0^\infty x^{\sigma-1} g(x)\,dx$ は絶対収束であるとする．そのとき (39) から，その反転公式 (38) が導かれる．□

証明　$x = e^u$ とおけば次の等式が成り立つ：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s} f(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty e^{-u(\sigma+ti)}\,dt \int_{-\infty}^\infty e^{v(\sigma+ti)} g(e^v)\,dv$$

$$= \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(v-u)} e^{v\sigma} g(e^v)\, dv.$$

フーリエの積分定理 (16) によって，最後の式の値は $e^{-u\sigma}e^{u\sigma} \cdot g(e^u) = g(x)$ となり，すべてが証明された．□

メリン (Mellin) の積分変換の例

(a)

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

とおく．積分 $\int_0^\infty x^{\sigma-1} g(x)\, dx$ は $\sigma > 0$ のとき絶対収束であるから

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} g(x)\, dx = \frac{1}{s} \quad (\sigma > 0)$$

が得られ，さらにこの逆として次式が得られる．

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} \frac{x^{-s}}{s}\, ds \quad (\sigma > 0).$$

この公式はディリクレ級数論において重要である．

(b) Γ 関数の定義式

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx \quad (\sigma > 0)$$

から

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s} \Gamma(s)\, ds \quad (\sigma > 0)$$

が得られる．

(c) $\zeta(s)$ をリーマン (Riemann) のツェータ関数とするとき，公式

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \quad (\sigma > 1)$$

から

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s} \Gamma(s)\zeta(s)\, ds \quad (\sigma > 1)$$

が導かれる．

(d) 表式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}e^{-\pi\nu^2 x}\,dx=\int_0^\infty x^{s-1}\frac{\vartheta(x)-1}{2}\,dx \qquad (\sigma>1)$$

に対しての逆は,

$$\vartheta(x)=1+\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}x^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\,ds \quad (\sigma>1)$$

となる.

メリンの積分変換は解析的整数論における重要な手段であるが，それ以外の場面においても解析学にはしばしば登場する.

2.10.9　ギブスの現象

区分的に滑らかな関数 $f(x)$ のグラフに対して，そのフーリエ級数の部分和の，グラフとして得られる波形の近似曲線を考えよう．この近似曲線は，$f(x)$ の不連続点を含まない任意の区間では，フーリエ級数が一様収束するから，曲線 $f(x)$ にすり寄るように近づく．しかし不連続点の間近では，収束はもはや一様でなく，近似曲線は鋭い振動を示しながらしだいに不連続点に引き寄せられるような波形を示す．近似を進めても，不連続点の近くでの近似曲線の振幅は，$f(x)$ の不連続点の跳び (jump) には近づかない．この現象を**ギブス (Gibbs) の現象**という[42]．これをもっと正確に調べるには，§2.5 の結果に基づき，次の特別なフーリエ級数

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu} \quad (0<x<2\pi)$$

に考察を限るとよい．このとき，公式

$$s_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu x}{\nu}=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

42 ［原註］この事実は，初めてギブスによって，全く実験的に見つけられた．Gibbs, J.W.: Fourier's series. Nature, Bd. 59, p. 200, p. 606, 1898/99.

により，この部分和の剰余は

$$r_n(x)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\nu x}{\nu}=\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

あるいは

$$r_n(x)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{(n+\frac{1}{2})x}\frac{\sin t}{t}\,dt+\varrho_n(x)$$

と表わすことができる．ただし

$$\varrho_n(x)=\int_0^x\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

とおいた．微分してみると容易にわかるように，剰余が極大または極小となる点

$$x_k=\frac{2k\pi}{2n+1}\quad(k=1,2,\ldots,n)$$

において近似は最も悪くなる．その点で剰余の値は大きさが

$$r_n(x_k)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{k\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx+\varrho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

である．

k を固定して，n を増大させれば，$\varrho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ は 0 に収束する．そのとき，点 x_k は不連続点に近づくのであるが，その点における近似曲線と曲線 $\frac{\pi-x}{2}$ との差 $r_n(x_k)$ は，

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x_k)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{k\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

に収束する．たとえば $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x_1)\approx-0.2811$ である．すなわち近似曲線は，もとの曲線の跳躍量の約 9％ 以上はみ出るのである[43]．

---

[43] ［原註］Bôcher, M.: Introduction to the theory of Fourier's series. Annals of Math. Serie. 2, Bd. 7, pp. 81–152，特に pp. 123–132．1906．— Runge, G.: Theorie und Praxis der Reihen. pp. 170–182. Leipzig 1904. ギブスの現象を他の直交系へ拡張すること，および，特に多変数の場合については Weyl, H.: Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen. Rend. Circ. mat. Palermo Bd. 29, pp. 308–323．1910．さらに同著者：Über die Gibbsche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene. Ib. Bd. 30, pp. 377–407．1910．

なお，フェイェールの（算術）平均によって近似する場合には，ギブスの現象は起こらないことを注意しよう．

2.10.10　グラムの行列式に関する一定理

《定理》 G' を基本領域 G の部分領域とする．$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ が G における区分的に連続な関数であり，Γ は G におけるこの関数系のグラムの行列式，Γ' は G' におけるそれとするとき，次の不等式が成り立つ．

$$\Gamma' \leqq \Gamma.$$

□

証明は固有値の最大・最小性から直ちに得られる．すなわち，Γ は2次形式

$$K(t,t) = \int_G (t_1\varphi_1 + \cdots + t_n\varphi_n)^2 \, dG$$

の固有値の積であり，一方 Γ' は

$$K'(t,t) = \int_{G'} (t_1\varphi_1 + \cdots + t_n\varphi_n)^2 \, dG$$

に同様に対応する積である．そうして，明らかな不等式

$$K'(t,t) \leqq K(t,t)$$

によって，$K'(t,t)$ の各固有値は $K(t,t)$ の対応する固有値以下となるからである．

グラムの行列式に対する次の表式を使えば別証が得られる．簡単のために，1変数 x が基本領域 $0 \leqq x \leqq 1$ を動くものとすれば

$$\Gamma = \left| \int_0^1 \varphi_i \varphi_k \, dx \right|$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}^2 dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n.$$

これは第 1 章の (45) に完全に符合するものである[44].

2.10.11　ルベーグの積分概念の応用

この章で扱った多くの事実や関係は，初等的なリーマン積分の概念の代わりに，ルベーグが定式化した積分概念を基礎に置くことによって本質的に完成度の高いものとなる．それには，問題とする関数の範囲をルベーグの意味で積分できる，いわゆる**可積分**な関数まで拡げ，その上で，ルベーグ積分に関する基本定理を適用するのである．ルベーグの理論は点集合 $\mathcal{M}$ の測度[45]の概念から出発する．ここで，$\mathcal{M}$ は与えられた有限区間内の集合とする．$\mathcal{M}$（のすべての点）を加算個の区間の集合が覆うとする．これらの区間は互いに重なっていても差支えない．これらの区間の長さの和の下限を m とする．一方，m' は $\mathcal{M}$ の余集合 $\mathcal{M}'$，すなわち，与えられた区間の点で $\mathcal{M}$ に属さないものの全体，に対して上のように定まる下限とする．$m+m'$ が与えられた区間の長さに等しいとき，集合 $\mathcal{M}$ は**可測**であるといい，m をその**測度**という．この定義によれば，可算集合の測度は 0 である．（このような集合を「零集合」という.）さて，$f(x)$ を区間 G $(a \leqq x \leqq b)$ で定義された有界な関数とし，その関数値は区間 J に含まれるとする．J を部分区間 $J_1, J_2, \ldots, J_n$ に分解する．このような，すべての部分区間 J_i に対して，$f(x)$ の値が J_i 内にあるような x の全体は G の部分集合であるが，その測度 m_j が常に存在するとき，$f(x)$ は G において可測であるという．このとき，$f(x)$ は G 内で**可測**であるという．f_j を f がとる J_i 内の値の 1 つとすれば，和 $\sum_{j=1}^{n} m_j f_j$ は，部分区間 J_i の長さが一様に 0 に収束するとき，(それ以外の）極限移行の仕方によらない一定の極限値に収束する．この極限値を関数 $f(x)$ の（ルベーグ）**積分**というが，これは普通のリーマン積分の自然な拡張になっており，同じ記号で表わされる．零集合でのみ 0 と異なる値をとる関数に対しては，積分は常に 0 である．従って，任意の零集合，たとえばすべての有理点で関数値

---

[44] ［原註］Kneser, A.: Zur Theorie der Determinanten. Festschr. H.A., Schwarz, pp. 177–191. Berlin, 1914. さらに，Kowalewski, G.: Determinanten.

[45] ［訳註］（独）では Mass で，質量とも訳せる．

を任意に変えても，積分値は変わらない．このことは，積分が可能な関数の範囲が，新しい定義では本質的に拡げられたことを示している．ルベーグの意味で積分できる関数を**可積分**であるという．

ルベーグの積分概念は，考えている領域で有界でない関数に拡張される．このときは，まず $|f(x)| < N$ が成り立つような部分領域にわたって積分をし，ついで N を無限大にする．この積分の極限が存在するとき，その値を全領域でのルベーグ積分とする．

我われの理論にとって重要なのは，次の諸定理であるが，これらは，上に紹介した新しい概念に基づいて導かれる．

(a) **ルベーグの収束定理**．区間 (a,b) で可積分な関数の列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ が与えられ，区間内の任意の x に対して $f(x)$ がある関数 $F(x)$ に収束するとき，すべての関数の絶対値が n, x に無関係なある定数以下であれば，収束が一様でなくても，極限移行の等式

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx = \int F(x)\,dx$$

が成り立つ．

さらに進んで，もし不等式

$$|f_n(x)| < \varphi(x)$$

が n に無関係なある可積分関数 $\varphi(x)$ に対して成立すれば，上と同じ極限移行の等式が成り立つ．

これらの定理は，収束が一様でない多くの場面において，無限級数の項別積分を正当化するために用いられる．

(b) **平均収束**．関数列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ は，2乗可積分な関数からなり，かつ $\lim\limits_{n,m\to\infty}\int(f_n - f_m)^2\,dx = 0$ を満たすとする．そのとき関数列 $f_n(x)$ は**平均収束**であるという．次の定理[46]が成り立つ．

《定理》 このような関数列から，部分列 f_{n_i} を選んで，測度0の集合を除いて，2乗可積分な関数 $f(x)$ に収束させることができる．□

46　［訳註］現代風に整理すれば「L^2-ノルムのもとでコーシー列をなす関数列は L^2-極限 f をもつ．しかも部分列を選べば収束はほとんどいたる所各点収束である」という形となる．（f_n および f の可積分性は仮定しなくてもよい．）

(c) **フィッシャー–リース** (Fischer–Riesz) **の定理**．この定理[47]には 2 つの同値な形がある．

フィッシャーの形．関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... がすべて 2 乗可積分で $\lim_{n,m\to\infty} \int (f_n - f_m)^2\, dx = 0$ とする．そのとき，2 乗可積分な関数 $f(x)$ で $\lim_{n\to\infty} \int (f_n - f)^2\, dx = 0$ となるものがある．

リースの形．$\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots$ を任意の与えられた直交関数系，$a_1, a_2, \ldots$ を $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ が収束するような任意の実数列とするとき，可積分かつ 2 乗可積分な関数 $f(x)$ で $a_\nu = (f, \omega_\nu)$ となるものがある．この定理によって，関数の範囲と積分の概念とを，ここでの意味に拡張しさえすれば，§2.1 で述べた関係は，同値関係として成立する．

(d) **関数系の完全性と閉性**．関数系が**閉じている**とは，この系のすべての関数に直交する，正規化された関数が存在しないことである．以下を通じて，登場する関数およびその平方は可積分であると仮定しよう．そのとき，次の定理が成り立つ．

《定理》 すべての閉じた関数系は完全であり，その逆も正しい．□

実際，たとえば，$f(x)$ が 2 乗積分が正であるような関数であり，かつ $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \ldots$ なる直交系のすべての関数と直交するならば，$0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, \omega_\nu)^2 < \int f^2\, dx$．従ってこの直交関数系は完全でない．逆に，関数系が完全でないなら，$a_\nu = (f, \omega_\nu)$ とするとき $\int f^2\, dx - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 > 0$ であるような関数 $f(x)$ が存在する．関数 $f_n = f - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \omega_\nu$ はフィッシャー–リースの定理（フィッシャーの形）によって，平均収束の意味である関数 $\varphi(x)$ に収束し，$\int \varphi^2\, dx = \int f^2\, dx - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 > 0$ が成り立つ．しかも $\varphi(x)$ はすべての ω_ν と直交する．従って，この系は閉じていない．

---

47 ［原註］Riesz, F.: Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. C.R. Acad. sci. Paris Bd. 144, pp. 615–619, 1907. —— Über orthogonale Funktionensysteme. Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys. Kl.), pp. 116–122, 1907. —— Fischer, E.: Sur la convergence en moyenne. C.R. Acad. sci. Paris, Bd. 144, pp. 1022–1024, 1907.

第3章　線形積分方程式の理論

3.1　予備的考察

3.1.1　記号と基礎概念

$K(s,t)$ を領域 $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ で定義された 2 変数 s, t の連続関数とし，λ をパラメータとする．さらに $f(s)$ と $\varphi(s)$ は区間 $a \leqq s \leqq b$ で連続な s の関数であり，関数方程式

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

で結ばれているとする.（以下，積分領域を特に記さない場合には，積分はすべて上に示した「基本領域」にわたって行なうものと定める.）方程式 (1) を，**核 $K(s,t)$ をもつ第 2 種の線形積分方程式**という．この方程式 (1) によっておのおのの連続関数 $\varphi(s)$ に他の関数 $f(s)$ が線形に対応する．すなわち，線形結合 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ には $c_1 f_1 + c_2 f_2$ が対応する．ここでは主として積分方程式の解法，すなわち，$f(s)$ が与えられたときに $\varphi(s)$ を決定するという問題を扱う．その際，特にことわらない限り，現れる数値はすべて実数であるとする．

関数 $f(s)$ が恒等的に 0 の場合には，(1) は**同次の積分方程式**という．この方程式が自明な解 $\varphi = 0$ 以外にも解をもつ場合には，任意の定数を乗じたものも解であるから，非自明な解はあらかじめ正規化されていると仮定してもよい．同次方程式がいくつかの解 φ_1, φ_2, $\ldots$ をもつ場合には，それらの線形結合 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots$ もすべて解である．それゆえ，互いに線形独立な

解がいくつもある場合には，それらは正規直交化されていると仮定してもよい．というのは，もしそうなっていないときには，前に§2.1で説明した直交化の手順が，同次方程式の解であるという性質を損なわずに適用できるからである．

同次積分方程式が0と異なる解をもつような λ の値をその核の**固有値**という[1]．その λ に対して，互いに直交している（自身は正規化されている）同次方程式の解 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ を，固有値 λ に属する核の**零解**または**固有関数**という．各固有値ごとに正規直交系をなす固有関数の個数は有限である．なぜなら，まず実数 s を固定して，核 $K(s,t)$ と正規直交関数 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$ に対してベッセルの不等式 (§2.1) を適用すると

$$\lambda^2 \int K(s,t)^2\,dt \geqq \lambda^2 \sum_{i=1}^{h} \left[\int K(s,t)\varphi_i(t)\,dt\right]^2 = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i(s)^2$$

が導かれ，これを s について積分すれば

$$\lambda^2 \iint K(s,t)^2\,ds\,dt \geqq h$$

となって，個数 h の上限が得られるからである．以上の結果を次のようにいい表すことができる：**どの固有値についても多重度（線形独立な解の個数）は有限である**．

§3.6で示すように，我われの積分方程式の扱いは§1.2で学んだ線形代数の問題の自然な拡張である．数学解析における積分方程式の格別の意義は，バラバラに見える多くの考え方に統一的な視点を与えるところにある．

3.1.2　関数の積分変換

積分方程式 (1) の中で主役となる部分は

$$g(s) = \int K(s,t)h(t)\,dt \tag{2}$$

---

1 ［訳註］現代風に，核 $K(s,t)$ が定める積分作用素 $\varphi(\cdot) \to \int K(\cdot,t)\varphi(t)\,dt$ を $\mathcal{K}$ とおけば，核 $K(\cdot,\cdot)$ の固有値 λ の逆数 $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ が積分作用素 $\mathcal{K}$ の固有値となる．積分方程式でのこの「混乱」は歴史的な習慣による．

の形の積分で与えられている．(2) で表わされた関数 g のことを，核 K による関数 h の**積分変換**という．

関数 $h(t)$ が区分的に連続ならば，$g(s)$ は確かに連続である．しかしそれだけではない．すなわち，もし一定の上限 M に対して不等式 $\int h(t)^2\,dt \leqq M$ が成り立つならば，(2) で表わされる関数全体は同程度に連続である．つまり任意の正数 ε に対して，関数 h の形によらない正数 $\delta(\varepsilon)$ が存在して，$|\eta| < \delta$ である限り不等式 $|g(s+\eta) - g(s)| < \varepsilon$ が導かれる（§2.2 参照）．実際，シュヴァルツの不等式

$$\big[g(s+\eta) - g(s)\big]^2 \leqq M \int \big[K(s+\eta,t) - K(s,t)\big]^2\,dt$$

が成り立つから，核の一様連続性から容易に上のことがいえる．なぜなら，任意の小さい正数 σ に対して η を十分小さくとれば，不等式

$$\big|K(s+\eta,t) - K(s,t)\big| < \sigma$$

が t の値に関係なく成り立つからである．

さらに，もし（s, t に関して）一様に

$$\lim_{n\to\infty} K_n(s,t) = K(s,t)$$

であるならば，積分記号下で極限をとることができるから，与えられた $h(t)$ に対して

$$g(s) = \lim_{n\to\infty} \int K_n(s,t)h(t)\,dt$$

という関係が s について一様収束の意味で成り立つ．さらに，$\int h^2\,dt \leqq M$ を満たす限りどの関数 $h(t)$ に対しても，次の形の関数

$$g_n(s) = \int K_n(s,t)h(t)\,dt, \quad g(s) = \int K(s,t)h(t)\,dt$$

はすべて同程度に連続であることが導かれる．また，これらの関数は一様に有界である．つまり，これらどの関数の絶対値も共通の一定値を超えることがない．このことはシュヴァルツの不等式

$$g_n(s)^2 \leqq M \int \big[K_n(s,t)\big]^2\,dt \quad \text{および} \quad g(s)^2 \leqq M \int \big[K(s,t)\big]^2\,dt$$

から容易にわかる．

3.1.3　退化核

変数 s の関数と変数 t の関数の積を有限個加えた形に表わされる核

$$A(s,t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(s)\beta_i(t) \tag{3}$$

を**退化核**という[2]．ここで関数 $\alpha_i(s)$ および関数 $\beta_i(t)$ のそれぞれは，互いに線形独立であると仮定することができる．なぜなら，もし線形独立でないとすれば，関数のどれかを他の関数の線形結合で表わすことにより，$A(s,t)$ を p より少ない項数の積和に書くことができるからである．連続関数 $K(s,t)$ が多項式によって一様に近似できるという定理（§2.4 参照）によれば，連続な核 $K(s,t)$ は退化核により任意の精度で一様に近似できることがわかる．なぜなら s と t の任意の多項式は明らかに退化核とみなせるからである．

退化核 $A(s,t)$ を，次のように異なる形に書きかえる方が都合のよい場合が少なくない．$2p$ 個の s の関数 $\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_p(s); \beta_1(s), \beta_2(s), \ldots, \beta_p(s)$ を，正規直交関数系 $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots, \omega_q(s)$ の線形結合で表わしたとしよう．これはもとの関数の直交化によって常に可能である．その結果，$A(s,t)$ は2重和

$$A(s,t) = \sum_{i,j=1}^{q} c_{ij}\omega_i(s)\omega_j(t) \tag{4}$$

の形になる．積 $\omega_i(s)\omega_j(t)$ は正方形領域 $a \leqq s \leqq b,\ a \leqq t \leqq b$ における q^2 個の関数の系となるが，やはりすべて互いに直交し，従って線形独立である．もし $A(s,t)$ が**対称**，すなわち $A(s,t) = A(t,s)$ であるならば

$$\sum_{i,j=1}^{q} (c_{ij} - c_{ji})\omega_i(s)\omega_j(t) = 0$$

が成り立つから，積 $\omega_i(s)\omega_j(t)$ の線形独立性によって $c_{ij} = c_{ji}$ となる．

また，対称核 $K(s,t)$ は常に対称な退化核 $A(s,t)$ によって一様に近似できる．そのことを見るには，必要があれば $A(s,t)$ を関数 $\frac{1}{2}(A(s,t) + A(t,s))$

2　［訳註］分離核あるいは縮退核ともいう．

でおきかえさえすればよい．$A(s,t)$ と同様に，後者の関数も対称核 $K(s,t)$ を一様に近似するからである．

3.2 退化核に対するフレドホルムの定理

積分方程式の一般理論の主定理はフレドホルム (Fredholm)[3]によって初めて証明された．それは線形方程式の理論の主定理と完全に対応していて，次のように述べられる：

《定理》 任意の $\lambda \neq 0$ に対して，積分方程式

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

について，次の 2 つの場合のどちらか一方が起こる．

第 1 は，任意に与えられた連続関数 $f(s)$ に対して (1) がただ 1 個の連続な解 $\varphi(s)$ をもつ場合で，特に $f=0$ に対する解は $\varphi=0$ である．

第 2 は，(1) に対応する同次方程式

$$\psi(s) = \lambda \int K(s,t)\psi(t)\,dt \tag{5}$$

が，r をある自然数として，互いに線形独立な解 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ をもつ場合である．

第 1 の場合には，(1) に伴なう「転置」積分方程式

$$g(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(t,s)\varphi(t)\,dt \tag{6}$$

も常に一意の解をもつ．

第 2 の場合には，転置同次方程式

$$\chi(s) = \lambda \int K(t,s)\chi(t)\,dt \tag{7}$$

がやはり r 個の互いに線形独立な解 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$ をもち，非同次の積分方程式 (1) は，与えられた関数 $f(s)$ が r 個の条件

---

[3] ［原註］Fredholm, I: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta math. Bd. 27, pp. 365–390, 1903.

$$(f, \chi_i) = \int f(s)\chi_i(s)\,ds = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{8}$$

を満たすときに限って解をもつ．その場合の (1) の解は，任意の線形結合 $c_1\psi_1 + \cdots + c_r\psi_r$ だけの付加項を除いて定まる．特に条件

$$(\varphi, \psi_i) = \int \varphi(s)\psi_i(s)\,ds = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

のもとでは，解は一意に定まる．□

この定理をまず，核 $K(s,t) = A(s,t)$ が退化核で式 (3) によって表わされている場合に証明しよう．この場合には，我われの積分方程式の理論はほとんど直接な形で p 個の未知数をもつ p 個の連立線形方程式の理論に帰着する．すなわち，積分方程式を

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(s) \int \beta_i(t)\varphi(t)\,dt \tag{9}$$

の形に書き，$x_i = (\beta_i, \varphi)$ とおいたのち (9) に $\beta_j(s)$ を乗じて s について積分すれば，x_i に対する方程式系

$$f_j = x_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ji}x_i \quad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{10}$$

を得る．ただし $f_j = (\beta_j, f)$, $c_{ji} = (\beta_j, \alpha_i)$ である．この方程式系が一意の解 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ をもつならば，関数

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i\alpha_i(s)$$

は確かに積分方程式の解である．そのことは，この関数を積分方程式に代入して方程式 (10) を考慮すればすぐに確かめられる．

そのときには，転置方程式系

$$g_j = y_j - \lambda \sum_{i} c_{ji}y_i \tag{11}$$

も一意の解 $y_1, y_2, \ldots, y_p$ をもち，

$$\varphi(s) = g(s) + \lambda \sum_{i} y_i\beta_i(s)$$

が転置積分方程式 (6) の解である．

他方，もし $x_1, x_2, \ldots, x_p$ が同次方程式系

$$(12) \qquad 0 = x_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ji} x_i \quad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

の非自明な解であるならば，同次積分方程式 (5) の非自明な解が

$$\psi(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i(s)$$

という形で得られる．同次方程式系 (12) の線形独立な 2 つの解 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ と $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ は，同次積分方程式の線形独立な 2 つの解 $\psi(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \alpha_i(s)$ と $\psi'(s) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x'_i \alpha_i(s)$ を与えるのであり，その逆も正しい．

同次方程式 (5) の r 個の線形独立な解 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ の存在，すなわち (12) の r 個の線形独立な解の存在は，転置方程式系

$$(13) \qquad g_j = y_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ij} y_i \quad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

の $g_j = 0$ のときの同じ数の線形独立な解 $y_{l1}, y_{l2}, \ldots, y_{lp}$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$ の存在，すなわち転置同次積分方程式 (7) の r 個の線形独立な解

$$\chi_1(s),\ \chi_2(s),\ \ldots,\ \chi_r(s)$$

の存在と同等である．ここで

$$(14) \qquad \chi_l(s) = \lambda \sum_{j=1}^{p} y_{lj} \beta_j(s)$$

である．さて方程式論の定理によると，$r = 0$ の場合は方程式 (10)，よってまた (13) および (6) は常に一意に解くことができる．他方 $r > 0$ の場合は，非同次方程式 (10) の可解性，すなわち積分方程式 (5) の可解性については，f_j に対する条件

$$(15) \qquad \sum_{j=1}^{p} f_j y_{lj} = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, r)$$

が必要かつ十分である．y_{lj} と f_j の定義によれば，この条件は

(16) $$(f, \chi_l) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, r)$$

と同値であることが直ちにわかる．

これで退化核の場合のフレドホルムの定理が完全に証明された．

3.3　任意の核に対するフレドホルムの定理

前節で得た結果に基づいて任意の核をもつ積分方程式を扱うためには，§2.2 の収束定理が用いられる．

核 $K(s,t)$ が退化核の列 $A_1(s,t)$, $A_2(s,t)$, ..., $A_n(s,t)$, ... によって一様に近似できると仮定し，積分方程式 (1) とともに，近似積分方程式

(17) $$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s,t)\varphi(t)\,dt$$

を同時に考察しよう．そうすると，(与えられた λ に対して) 次の2つの場合が生じる．

場合 I：方程式 (17) は各関数 $f(s)$ について無限個の n に対して (適さない近似方程式は除外して番号を付けかえれば,「すべての n に対して」といってもよい) それぞれ1つの解 $\rho_n(s)$ をもち，それらのすべてについて不等式 $(\rho_n, \rho_n) = c_n^2 \leqq M$ が成り立つ．ここで M は n によらない正数である．

場合 II：場合 I に述べたことが成立しない．このときには，ある $f(s)$ に対して以下の (a), (b) のどちらかが起こる．

(a) 無限に多くの n に対して (すべての n に対して，と仮定してもよい) 解 $\rho_n(s)$ が存在するが，$n \to \infty$ のとき $(\rho_n, \rho_n) = c_n^2 \to \infty$ となる．

(b) 有限個の n を例外として解は存在しない (番号を付けなおして，どの n についても解がないとしてもよい)．それゆえ，退化核について示されたフレドホルムの定理によって，同次積分方程式

(18) $$0 = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s,t)\varphi(t)\,dt$$

がすべての n に対して規格化された解 $\sigma_n(s)$ をもつ．

場合 I においては，関数 $\rho_n(s) - f(s)$ が核 $A_n(s,t)$ による有界関数列 ρ_n の積分変換である．(ρ_n, ρ_n) が有界であるから，これらの関数は§3.1 によって一様有界かつ同程度連続である．従って，関数列 $\rho_n(s)$ は，我われの収束

定理に従えば，一様収束する部分列を含み，その極限として連続な極限関数 $\varphi(s)$ を定める．式 (17) の積分記号の中で部分列に沿っての極限移行が許されるから，この極限関数 $\varphi(s)$ に対して積分方程式 (1) が成り立つ．結局，場合 I では，どのような $f(s)$ に対してもこの積分方程式は可解である．

場合 II (a) では，積分方程式 (17) において $\varphi = \rho_n$ とおいた式を c_n で割って $\frac{\rho_n}{c_n} = \sigma_n$ とおけば，

$$\frac{f(s)}{c_n} = \sigma_n(s) - \lambda \int A_n(s,t)\sigma_n(t)\,dt$$

となる．場合 II (b) では，方程式 (18) が $\varphi = \sigma_n$ に対して成り立つことに注目しよう．どちらの場合にも σ_n は正規化されているから，σ_n の積分変換である関数 $\sigma_n(s) - \frac{f(s)}{c_n}$，そうしてさらに $\sigma_n(s)$ は同程度連続かつ一様有界である．そこで一様収束する部分列が存在して極限関数 $\psi(s)$ が定まり，当然ながらこれは同次積分方程式

$$\psi(s) = \lambda \int K(s,t)\psi(t)\,dt \tag{5}$$

の解であり，かつ正規化されている．従って場合 II では，同次積分方程式は非自明な解，すなわち p. 120 で定義した固有関数をもつ．

以上から，§3.2 で述べたフレドホルムの定理を導くために，λ のどんな値に対しても線形独立な固有関数は有限個（r 個）しかあり得ないという §3.1 での注意を思い出そう．

$r = 0$ については，上の場合 II では明らかに起こり得ない．場合 II では (5) の正規化された解が存在するからである．従って $r = 0$ のときは場合 I になるわけで，左辺の $f(s)$ がどんな関数であっても，積分方程式 (1) は解をもつ．この解は一意に決まる．なぜなら，解が 2 つあればその差は (5) の非自明な解となり，仮定に反するからである．こうしてフレドホルムの定理の第 1 の部分が証明された．

次に $r > 0$ とし，$\psi_1, \ldots, \psi_r$ を方程式 (5) の互いに直交する正規解とする．$A_n \Rightarrow K$ であるから[4]

[4] ［原註］収束を表わすのに普通矢印 $\rightarrow$ を用いる．同様に一様収束には 2 重の矢印 $\Rightarrow$ を用いることにしよう．

$$\delta_{n,i}(s) = \psi_i(s) - \lambda \int A_n(s,t)\psi_i(t)\,dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

で定義された関数について，$n \to \infty$ のとき $\delta_{n,i}(s) \rightrightarrows 0$ が成り立つ．

いま

$$A'_n(s,t) = A_n(s,t) + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{r} \delta_{n,i}(s)\psi_i(t)$$

とおくと，$A'_n(s,t)$ は核 $K(s,t)$ を一様に近似する退化核である．容易にわかるように，この核 $A'_n(s,t)$ はすべて，r 個の関数 $\psi_i(s)$ を固有関数としている．

十分大きい n については，線形独立な固有関数はこれより多くは現れない．なぜなら，もし $\psi_{r+1,n}(s)$ を正規化され，$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ と直交するそのような固有関数の列とすると，収束原理によって $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ に直交し，それゆえこれらの関数と線形独立な (5) の固有関数が得られたことになる．これは線形独立な固有関数の個数が正確に r であるという仮定に反するからである．

退化核に対してフレドホルムの定理が示されている，同次転置積分方程式

(19)
$$\chi(s) = \lambda \int A'_n(t,s)\chi(t)\,dt$$

もやはり十分大きい n に対して正規化され互いに直交するようなちょうど r 個の固有関数 $\chi_{i,n}(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ をもっている．退化核 $A'_n(t,s)$ は核 $K(t,s)$ に一様に収束し，関数 $\chi_{i,n}(s)$ は同程度連続で一様有界であるから，収束原理に基づく，その極限をとることにより，互いに直交する r 個の固有関数 $\chi_1(s), \chi_2(s), \ldots$ が得られる．しかし転置積分方程式

(20)
$$\chi(s) = \lambda \int K(t,s)\chi(t)\,dt$$

が r 個より多くの独立な解をもつことはあり得ない．あり得たとすれば，さかのぼって考えたとき，(5) に r 個より多くの解が存在したことになってしまう．

最後に，$r > 0$ の場合の積分方程式 (1) の可解性に関しては，条件

(21)
$$(f, \chi_i) = \int f(s)\chi_i(s)\,ds = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

が必要であることに注意しておこう．これは (1) に $\chi_i(s)$ を乗じて積分し，(20) を考慮して右辺の積分の順序を変えれば容易にわかる．また，条件 (21) が十分であることは以下のようにしてわかる．すなわち，まず

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{i,n}(s) = \chi_i(s) \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

を満たすような添字 n だけに考察を限り，条件 (21) によって n の増大とともに 0 に収束する数 $\varepsilon_{i,n} = (f, \chi_{i,n})$ を用いて関数

$$f_n(s) = f(s) - \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{i,n}\chi_{i,n}(s)$$

をつくる．そうすると，$(f_n, \chi_{i,n}) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots, r)$ であり，従って，退化核に対するフレドホルムの定理によって積分方程式

$$f_n(s) = \varphi(s) - \lambda \int A'_n(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{22}$$

は $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_r(s)$ に直交する解 $\rho_n(s)$ を確かにもっている．この解 $\rho_n(s)$ に対しては，場合 I が当てはまる．なぜなら，もしそうでないとすると，$\varphi_1(s), \varphi_2(s)$, ..., $\varphi_r(s)$ に直交する (5) の解が得られることになって，仮定に反するからである．従って，収束原理によって積分方程式における極限移行が可能となり，$f_n(s) \Rightarrow f(s)$ から (1) の可解性が示される．これで我われの核 $K(s,t)$ に対するフレドホルムの定理がすべて証明できた．

そもそも，同次方程式が 0 でない解をもつ場合かあるのかという問題には，対称核について次の節で答えよう．

3.4 対称核とその固有値

第 1 章の双線形形式の理論に対応して，積分方程式についても，核 $K(s,t)$ が対称であるとき，すなわち

$$K(s,t) = K(t,s) \tag{23}$$

が成り立つときには，さらに進んだ取り扱いが可能である．この場合，積分方程式はその転置方程式と同一である．この節ではそのような対称積分方程式について，パラメータ λ のどのような値に対して同次積分方程式 (5) が非

自明の（正規化された）解をもつかという問いを最優先に取り上げる．パラメータ λ のこれらの値 $\lambda = \lambda_i$ と，それに属する関数を，前にも述べたように核 $K(s,t)$ の固有値および固有関数という．§1.3 に述べた定理と類似の，次の定理を証明する：

《定理》 すべての対称な，恒等的に 0 ではない連続な核は，固有値および固有関数をもち，その個数は核が退化していないとき，かつそのときに限って可算無限個である．実対称な核の固有値はすべて実数である．□

3.4.1　対称核の固有値の存在

まず固有値の存在を証明しよう．そのために，第 1 章の 2 次形式に代わって現れる次の**積分 2 次形式**

$$J(\varphi,\varphi) = \iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt \tag{24}$$

を考察する．ここで φ は基本領域で連続または区分的連続な任意の関数である．シュヴァルツの不等式によって

$$J(\varphi,\varphi)^2 \leqq (\varphi,\varphi)^2 \iint K^2(s,t)\,ds\,dt$$

が成り立つから，

$$(\varphi,\varphi) = 1 \tag{25}$$

という条件をつければ $J(\varphi,\varphi)$ の絶対値は有界である．この積分形式がすべての許される関数に対して 0 となるのは，核自身が恒等的に 0 である場合に限る．

それを見るために**双線形積分形式**

$$J(\varphi,\psi) = J(\psi,\varphi) = \iint K(s,t)\varphi(s)\psi(t)\,ds\,dt \tag{26}$$

を考え，次のような変形

$$J(\varphi+\psi,\varphi+\psi) = J(\varphi,\varphi) + 2J(\varphi,\psi) + J(\psi,\psi) \tag{27}$$

ができることに注意すると，2 次形式が恒等的に 0 ならば双線形形式も恒

等的に 0 であることがわかる．(26) の中で特に $\psi(t) = \int K(s,t)\varphi(s)\,ds$ とおけば $\int(\int K(s,t)\varphi(s)ds)^2\,dt = 0$ と書けるから，任意の $\varphi(s)$ について $\int K(s,t)\varphi(s)\,ds = 0$ である．従って，t のある値を決めておいて $\varphi(s)$ を $K(s,t)$ に等しいように選んだとすれば，証明すべき恒等式 $K(s,t)=0$ が得られる．

もし恒等的には 0 でない φ に対して $J(\varphi,\varphi)$ が正値しかとらないか，または負値しかとらないという場合には，それぞれ，核は**正定値**または**負定値**であるという．それ以外の場合には核は**不定値**であるという．

J が正値をとり得るという仮定のもとで，正規化された関数 $\varphi(s)$ のうちで，$J(\varphi,\varphi)$ ができる限り大きい値をとるような $\varphi(s)$ を見つけるという最大問題を考えよう．$J(\varphi,\varphi)$ の値の有界性により，積分形式 $J(\varphi,\varphi)$ の数値には上限 $\kappa_1 = \frac{1}{\lambda_1}$ が確実に存在する．示すべきことは，この上限の正の値が然るべき関数 $\varphi(s)$ によって実際に到達されるということである．そのために核 $K(s,t)$ は，§3.1 の終わりに示した形の退化した対称核

$$A_n(s,t) = \sum_{i,k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)}\omega_i(s)\omega_k(t), \quad c_{ik}^{(n)} = c_{ki}^{(n)}$$

によって一様に近似されていると考えよう．そうすると，積分形式

$$J_n(\varphi,\varphi) = \iint A_n(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt$$

を付帯条件 (25) のもとで最大にするという問題は，q_n 個の変数の 2 次形式の対応する問題と同等であることがわかる．実際

$$(\varphi,\omega_i) = x_i \quad (i=1,2,\ldots,q_n)$$

とおけば

$$J_n(\varphi,\varphi) = \sum_{i,k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_i x_k \tag{28}$$

となり，この $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$ の 2 次形式を付帯条件 (25) のもとで最大にすることになる．

さて，§2.1.3 のベッセルの不等式を $\varphi(s)$ と直交関数系 $\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots, \omega_{q_n}(s)$ に対して書けば

$$(\varphi, \varphi) \geqq \sum_{i=1}^{q_n} x_i^2$$

が得られる．それゆえ2次形式(28)の中の変数は $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 \leqq 1$ という制約を受けている．従って，この2次形式の最大値は $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1$ のときに達せられる．そうでないとすると，変数に適当な定数 $\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2} > 1\right)$ を掛けることにより $J_n(\varphi, \varphi)$ の値を大きくすることができるからである．

従って，§1.3で考えた主軸変換と全く同じ問題と取り組むことになるのである．すなわち，上の2次形式の最大値は，方程式

$$\sum_{k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_k = \kappa_{1n} x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q_n) \tag{29}$$

を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$ の値の組によって達せられる．ここで比例定数 κ_{1n} はまさに $J_n(\varphi, \varphi)$ の最大値に等しい．それを示すには，(29)に x_i を掛けて i について和をとればよい．右辺は $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1$ により κ_{1n} となり，左辺は $J_n(\varphi, \varphi)$ となるからである．

今後は，最大値を与える値の組を $x_1, x_2, \ldots, x_{q_n}$ と書くことにして

$$\varphi_n(s) = x_1\omega_1(s) + x_2\omega_2(s) + \cdots + x_{q_n}\omega_{q_n}(s)$$

とおけば，ω_i の正規直交性と $\sum x_i^2 = 1$ とによって関係式 $N\varphi_n = 1$ が成り立つ．また，方程式(29)と次の関係式

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\kappa_{1n}} \int A_n(s,t)\varphi_n(t)\,dt \tag{30}$$

とは同値である．なぜなら，(29)に $\omega_i(s)$ を掛けて和をとり，$x_i = (\varphi_n, \omega_i)$ に注意すれば(30)が得られ，逆に(30)に $\omega_i(s)$ を掛けて積分すれば(29)が得られるからである．

それゆえ，関数 $\varphi_n(s)$ は $A_n(s,t)$ の固有関数であって，属する固有値は $\mu_{1n} = 1/\kappa_{1n}$ である．すなわち

$$\varphi_n(s) = \mu_{1n} \int A_n(s,t)\varphi_n(t)\,dt. \tag{31}$$

さてここで n を限りなく増大させよう．このとき κ_{1n} は $J(\varphi, \varphi)$ の正の上限

κ_1 に収束する．なぜなら

$$\left|K(s,t) - A_n(s,t)\right| < \varepsilon$$

の関係から，シュヴァルツの不等式により，また $(\varphi,\varphi) \leqq 1$ の仮定のもとに

$$\left[J(\varphi,\varphi) - J_n(\varphi,\varphi)\right]^2 \leqq \varepsilon^2(b-a)^2$$

が導かれる．ただし b, a は積分の上下端である．従って n を十分大きくとれば，$J_n(\varphi,\varphi)$ の値域は $J(\varphi,\varphi)$ の値域にいくらでも近づき，それぞれの値域の上限についても同じことがいえる．これから，$\lim_{n\to\infty} \kappa_{1n} = \kappa_1$ が成り立つ．特に，κ_{1n} およびその逆数 μ_{1n} はどれもある定数値を超えない．また (31) の関係のおかげで，§3.1 で述べたように，関数 $\varphi_n(s)$ はすべての n に対して一様有界，同等連続な関数列をなしている．よって，我われの収束定理に従えば，極限関数 $\psi_1(s)$ に一様収束する部分列 φ_{n1}, φ_{n2}, ... を選び出すことができる．そこで方程式 (30) および $J_n(\varphi_n,\varphi_n) = \kappa_{1n}$, $(\varphi_n,\varphi_n) = 1$ の関係式において，この極限移行をすれば，以下の式が得られる：

$$\kappa_1\psi_1(s) = \int K(s,t)\psi_1(t)\,dt, \quad (\psi_1,\psi_1) = 1, \tag{32}$$

$$J(\psi_1,\psi_1) = \kappa_1. \tag{33}$$

ゆえに，関数 $\psi_1(s)$ は積分形式 $J(\varphi,\varphi)$ に対する最大問題の解であり，また核 $K(s,t)$ の固有関数である．

$J(\varphi,\varphi)$ は正値をとるとしたのであるから，κ_1 は 0 ではあり得ない．さらに，任意の関数 ψ に対しては，

$$J(\psi,\psi) \leqq \kappa_1(\psi,\psi) \tag{34}$$

という関係が成り立つ．ψ を正規化してみれば明らかであろう．

3.4.2 固有関数と固有値の全体

残りの固有値と固有関数を得るために，次のような方法をとろう：

積分 $J(\varphi,\varphi)$ を最大にするにあたり，付帯条件 $(\varphi,\varphi) = 1$ のほかにさらに

$$(\varphi,\psi_1) = 0$$

という付帯条件を加えるという問題を考えるのである．ただしこの2つの条件を課しても $J(\varphi,\varphi)$ はまだ正の値をとり得ると仮定する．2番目の条件を課すことによって積分形式の値域は前に考えた最大問題での値域よりも狭くなるから，今度の最大値 $\kappa_2 = 1/\mu_2$ は前の最大値 κ_1 よりも大きくなることはない．すなわち $\kappa_2 \leqq \kappa_1$, $\mu_1 \leqq \mu_2$ が成り立つ．この最大問題の解が存在することは，第1の固有値に対して適用した方法，すなわち2次形式の問題にひき戻してから極限をとることによって証明することができる．しかしそれよりも，ある異なる核の第1の固有値を定める問題に直接に帰着させる以下の方法の方が便利である．

まず関数

$$K_{(1)}(s,t) = K(s,t) - \frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1} \tag{35}$$

をつくり，やはり対称核として考察する．前に得た結果により，条件 $(\varphi,\varphi) = 1$ のもとでの最大問題

$$J_{(1)}(\varphi,\varphi) = \iint K_{(1)}(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt = \mathrm{Max.} = \kappa_2 = \frac{1}{\mu_2} \tag{36}$$

を解くことができて，その解は同次積分方程式

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K_{(1)}(s,t)\psi_2(t)\,dt \tag{37}$$

を満足する．ここで $J_{(1)}(\varphi,\varphi)$ もまた正値をとり得ると仮定すれば $\kappa_2 > 0$ である．方程式 (37) を

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K(s,t)\psi_2(t)\,dt - \mu_2 \frac{\psi_1(s)}{\mu_1}(\psi_2,\psi_1)$$

の形に書き，$\psi_1(s)$ を乗じ，s について積分し，積分順序を入れ替え，$(\psi_1,\psi_1) = 1$ に注意すれば，右辺は0になる．よって，

$$(\psi_1,\psi_2) = 0 \tag{38}$$

が得られる．すなわち固有関数 $\psi_2(s)$ は固有関数 $\psi_1(s)$ に直交している．これより

$$\int K(s,t)\psi_2(t)\,dt = \int K_{(1)}(s,t)\psi_2(t)\,dt \tag{39}$$

となり，$\psi_2(s)$ はまた $K(s,t)$ の固有関数でもあってそれに属する固有値が μ_2 であることがわかる．すなわち

$$\psi_2(s) = \mu_2 \int K(s,t)\psi_2(t)\,dt. \tag{40}$$

さて $(\psi_2, \psi_1) = 0$ であるから κ_2 は積分形式 $J_{(1)}(\varphi,\varphi)$ の付帯条件 $(\varphi,\psi_1) = 0$ のもとでの最大値であると考えることもでき，しかもその場合には，$J_{(1)}(\varphi,\varphi) = J(\varphi,\varphi)$ である．従って ψ_2 はこの小節のはじめに提起した最大問題の解にほかならない．

同じやり方でさらに進むことができる．すなわち，核

(41)

$$K_{(2)}(s,t) = K_{(1)}(s,t) - \frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2} = K(s,t) - \frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1} - \frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2}$$

をつくり，それから導かれる積分形式

$$J_{(2)}(\varphi,\varphi) = \iint K_{(2)}(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt \tag{42}$$

がなお正値をとり得ると仮定して，その最大値を求める．そうすると，上と全く同様に，最大問題の解として正規化された関数 $\psi_3(s)$ および最大値 $\kappa_3 = 1/\mu_3$ が得られる，これらは同次積分方程式

$$\psi_3(s) = \mu_3 \int K(s,t)\psi_3(t)\,dt$$

を満足し，かつ直交関係 $(\psi_3,\psi_1) = 0$, $(\psi_3,\psi_2) = 0$ を満たしている．ψ_3 はもとの積分形式を ψ_1 と ψ_2 に直交する正規化された関数を許容範囲として最大にする問題の解として得ることもできたはずのものである．前と同様に $\mu_2 \leqq \mu_3$ である．

このようにして核 $K_{(1)}, K_{(2)}, K_{(3)}, \ldots$ を順次につくっていくのであるが，それに対する積分形式が正の値をとり得る限りは，この操作をどこまでも続ける．一方，もし核

$$K_{(m)}(s,t) = K(s,t) - \frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1} - \cdots - \frac{\psi_m(s)\psi_m(t)}{\mu_m} \tag{43}$$

に至ったとき，初めてすべての φ に対して $J_{(m)}(\varphi,\varphi) \leqq 0$ となれば，固有関数 $\psi_m(s)$，固有値 μ_m を得たところでこの操作を打ち切ることになる．

結果として次のことがわかった．核 $K(s,t)$ の最小の正の固有値 μ_1 は，付帯条件 $(\varphi,\varphi)=1$ のもとで積分形式 $J(\varphi,\varphi)$ がとる最大値 κ_1 の逆数である．κ_1 は $K(s,t)$ の1番目の固有関数 $\varphi=\psi_1$ によって達せられる．それから先は，増大していく順に正の固有値 μ_h $(h=2,3,\ldots)$ が付帯条件

$$(\varphi,\varphi)=1,\ (\varphi,\psi_\nu)=0 \quad (\nu=1,2,\ldots,h-1)$$

のもとで $J(\varphi,\varphi)$ がとる最大値 κ_h の逆数として順次に決まっていく．最大値 κ_h は h 番目の固有関数 $\varphi=\psi_h$ によって達せられる．

このように順次に扱う最大問題の列の中に，正値をとり得ない $J(\varphi,\varphi)$ が現れたならば，そこで正の固有値が終わりになる．

積分形式 $J(\varphi,\varphi)$ が負値をとり得る場合には，負の固有値とそれに属する固有関数の系列 μ_{-1}, μ_{-2}, $\ldots$; $\psi_{-1}(s)$, $\psi_{-2}(s)$, $\ldots$ が正の固有値・固有関数のときと同じようにして得られる．ただ，前のときの最大問題に対応して今度は最小問題を考える必要がある．このようにして，負の，非増大な固有値の無限あるいは有限の列

$$\mu_{-1} \geqq \mu_{-2} \geqq \cdots \tag{44}$$

と，それに属する互いに直交する固有関数の列 $\psi_{-1}(s)$, $\psi_{-2}(s)$, $\ldots$ が得られた．

固有関数 $\psi_h(s)$ $(h>0)$ と固有関数 $\psi_{-k}(s)$ $(k>0)$ とは直交する．このことを見るために，方程式

$$\kappa_h\psi_h(s)=\int K(s,t)\psi_h(t)\,dt,$$
$$\kappa_{-k}\psi_{-k}(s)=\int K(s,t)\psi_{-k}(t)\,dt$$

の第1式に $\psi_{-k}(s)$ を，第2式に $\psi_h(s)$ をそれぞれ乗じ，その差をとって積分し，$K(s,t)=K(t,s)$ に注意すれば

$$(\kappa_h-\kappa_{-k})(\psi_h,\psi_{-k})=0$$

が得られる．$\kappa_h \neq \kappa_{-k}$ であるから，これで直交性が示された．

この操作を続けていくと，一般に正と負のまじった固有値の集合が得られる．そこでこれを絶対値が増大していく順に並べて λ_1, λ_2, λ_3, $\ldots$ としよう．

つまり $|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq |\lambda_3| \leqq \cdots$ となるようにする．それぞれに属する固有関数を $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \ldots$ とすれば，これは正規直交系をなしている．

核 $K(s,t)$ が有限個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ しかもたないならば，この核は退化核であって

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i} \tag{45}$$

という形をしていなければならない．なぜなら

$$K(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i} = \bar{K}(s,t)$$

とおくと，$\bar{K}(s,t)$ に対応する積分形式

$$\bar{J}(\varphi,\varphi) = \iint \bar{K}(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt$$

の最大値と最小値が共に 0 となるため，pp. 130–131 での考察により $\bar{K}$ は恒等的に 0 となるからである．すなわち：

《定理》 固有値と固有関数が有限個しかない核は退化核である．逆に，退化核は有限個の固有値と固有関数しかもたない．□

なぜなら，前にも見たように，退化核の固有値問題は 2 次形式の固有値問題と同値であって，そこには有限個の固有値しか現れないからである．

さて，§3.1 で定義したように，ある固有値 λ_i が**多重**，特に $\boldsymbol{r}$ **重**であるとは，その固有値に属する線形独立な——互いに直交するように選び得る——固有関数が，r 個あってそれよりも多くはない，ということである．どの固有値も有限の重複度 r しかもち得ない．すでに §3.1 で証明したこの定理の改良を以下のようにして与えることができる．

《定理》 直交関数系 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ に対して，§2.1 のベッセルの関係を用いると

$$\int K(s,t)^2\,dt \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int K(s,t)\varphi_i(t)\,dt \right)^2, \tag{46}$$

あるいは

(47)
$$\int K(s,t)^2\,dt \geqq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}$$

と書くことができる. □

これから，まず，正項級数

(48)
$$T(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}$$

が収束すること，しかもディニの定理（p. 61 参照）によってその収束が一様であることがわかる．次に，s についてもう一度積分して，$(\varphi_i,\varphi_i)=1$ を使えば

(49)
$$\iint K(s,t)^2\,ds\,dt \geqq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}$$

が導かれる．すなわち，**固有値の逆数の平方の和は収束する**．これから，固有値は決して有限値に集積することはない．従って固有値が無限個あるときは，その絶対値は限りなく増大しなければならない．特に，互いに等しい固有値は有限個しか存在し得ないことがわかる．

このことから，最大・最小問題を解くことによって順次に定義された固有値 λ_i と固有関数 φ_i とが，実の固有値と固有関数の全体を尽くすということを結論できる（複素数の固有値があり得ないことはあとで示す）．実際，もし χ が φ_i と線形独立な固有関数で——たとえば正の——固有値 σ に属するものとすれば，上に示したように，固有値 $\lambda_i \neq \sigma$ に属するすべての固有関数と直交する．しかし，もし σ が上に定義した固有値の 1 つ μ_h に等しく $(\sigma=\mu_h)$，しかも μ_h がちょうど r 重である，すなわち，

$$\mu_{h-1}<\mu_h=\mu_{h+1}=\cdots=\mu_{h+r-1}<\mu_{h+r}$$

であるとする．このとき，仮定により χ は固有関数 $\psi_h,\psi_{h+1},\ldots,\psi_{h+r-1}$ と線形独立であるから，χ はこれらの固有関数と直交する，そうして 0 でない線形結合 $\chi+c_0\psi_h+\cdots+c_{r-1}\psi_{h+r-1}=\bar{\chi}$ におきかえて考えることができる．$\bar{\chi}$ はやはり固有値 μ_h に属する固有関数である．簡単のために $\bar{\chi}$ を同じ文字 χ で表わせば，いずれにしても χ は最大法によって得られたすべての固有関数 ψ_i に直交する．従って μ_{n+1} が存在するようなどんな n をとって

も，固有値の最小性から

$$J(\chi,\chi)=\iint K(s,t)\chi(s)\chi(t)\,ds\,dt=\frac{1}{\sigma}(\chi,\chi)\leqq\frac{1}{\mu_{n+1}}$$

となる．従って，もし正の固有値 μ_n が無限個存在するならば，$\lim\mu_n=\infty$ により $(\chi,\chi)=0$ となり，χ は恒等的に 0 でなければならない．他方，正の固有値が有限個 n しかなければ，付帯条件 $(\chi,\psi_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ のもとで $J(\chi,\chi)$ は正の値をとり得ない．これからやはり $(\chi,\chi)=0$，従って $\chi=0$ となる．

上の論法は負の σ に対しても同様に当てはまるから，すべての ψ_i に直交する固有関数は恒等的に 0 でなければならない．これで我われの主張は証明された．

ここまでの結果に，あとで使う注意をつけ加えておこう：

$\eta_1(s),\eta_2(s),\ldots;\zeta_1(s),\zeta_2(s),\ldots$ を連続な（または区分的に連続な）2 つの関数列で，それらの関数のノルム平方が一定の限界 M 以下であるとすれば

$$K'_{(n)}(s,t)=K(s,t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

という核に対して

$$\lim_{n\to\infty}J'_{(n)}(\eta_n,\zeta_n)=\lim_{n\to\infty}\iint K'_{(n)}(s,t)\eta_n(s)\zeta_n(t)\,ds\,dt=0 \tag{50}$$

の関係が次の意味で一様に成り立つ．すなわち，$J'_{(n)}(\eta_n,\zeta_n)$ の小ささが M および n にしかよらないという意味である．

実際，固有値と固有関数の最大性から

$$\left|J'_{(n)}(\eta_n+\zeta_n,\eta_n+\zeta_n)\right|\leqq\frac{1}{|\lambda_{n+1}|}N(\eta_n+\zeta_n)\leqq\frac{1}{|\lambda_{n+1}|}4M,$$
$$\left|J'_{(n)}(\eta_n,\eta_n)\right|\leqq\frac{1}{|\lambda_{n+1}|}M,\quad\left|J'_{(n)}(\zeta_n,\zeta_n)\right|\leqq\frac{1}{|\lambda_{n+1}|}M$$

が成り立つこと[5]，さらに $|\lambda_n|\to\infty$ および

$$J'_n(\eta+\zeta,\eta+\zeta)=J'_n(\eta,\eta)+2J'_n(\eta,\zeta)+J'_n(\zeta,\zeta)$$

---

5 ［原註］シュヴァルツの不等式を使えば $N(\eta_n+\zeta_n)=(\eta_n,\eta_n)+(\zeta_n,\zeta_n)+2(\eta_n,\zeta_n)\leqq 4M$ であることが容易に導かれる．

であることを使えば，証明は容易である．

さらに次のことを注意しよう．**核は，その固有値がすべて正のとき，かつそのときに限り，正定値である**．またこのとき，かつこのときに限って，正規化された φ に対する積分形式 $J(\varphi,\varphi)$ は正の最小値をもち，従って $J(\varphi,\varphi)$ は負の値をとり得ない．

最後に，**実の対称核の固有値はすべて実である**．このことは§3.5の議論の中で自然に明らかになるが，ここでは別の直接的な証明を示そう．この定理はいいかえれば，$\lambda = p + iq\ (q \neq 0)$ とするとき，$\varphi(s) = \lambda \int K(s,t)\varphi(t)\,dt$ を満たす複素数値関数 $\varphi(s) = \psi(s) + i\chi(s)$（ただし ψ と χ とは実数値関数で，少なくとも一方は恒等的に 0 ではない）は存在しないということである．このような φ があるとすれば複素共役の量 $\bar{\varphi}$, $\bar{\lambda}$ に対して方程式 $\bar{\varphi}(s) = \bar{\lambda} \int K(s,t)\bar{\varphi}(t)\,dt$ が成り立つ．これらから前と同じようにして

$$0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \int \varphi(s)\bar{\varphi}(s)\,ds = 2iq \int (\psi^2 + \chi^2)\,ds$$

が得られる．従って $q = 0$，すなわち λ は実数でなければならない．

3.4.3　固有値の最大–最小性

第1章の2次形式のときと全く同じように，ここでも最大–最小性を基礎にすると，固有値 λ_n とそれに属する固有関数の直接的な定義，すなわち，それまでに得られた固有値と固有関数にさかのぼらない定義を与えることができる．

核 $K(s,t)$ の正の固有値，たとえば μ_n を考える．ただし，正の固有値が少なくとも n 個はあるものとする．そのとき $\varphi(s)$ が $(\varphi,\varphi) = 1$ という条件のほかに，さらに $(n-1)$ 個の制約

$$(\varphi, v_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{51}$$

を受けるという状況のもとで $J(\varphi,\varphi)$ を最大にするという問題を考える．ただし v_1, v_2, ..., v_{n-1} は任意に与えられた連続関数である．$J(\varphi,\varphi)$ の上限は必ず存在するが，それが許容される関数によって実際に達せられるかどうかは暫くおくことにしよう．いずれにしてもこの上限は，関数 v_1, v_2, ...,

v_{n-1} の選び方に依存する．そこでこの上限を $\kappa_n\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$，または簡単に $\kappa_n\{v_i\}$ と記すことにする．特に $v_i = \psi_i$ のときには，前節の定理によって $\kappa_n\{v_i\} = \kappa_n$ となる．しかもこの上限の値は関数 $\varphi = \psi_n(s)$ によって実際に到達される．

さて，どのような関数系 v_1, v_2, …, v_{n-1} に対しても

$$\kappa_n\{v_i\} \geqq \kappa_n$$

が成り立つことを以下に証明しよう．そのために固有関数 ψ_1, ψ_2, …, ψ_n の線形結合 $\varphi(s) = c_1\psi_1(s) + c_2\psi_2(s) + \cdots + c_n\psi_n(s)$ を考える．この $\varphi(s)$ に対して条件 $(\varphi, \varphi) = 1$ および (51) を課すと次の式が得られる：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i(\psi_i, v_h) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n-1).$$

これは n 個の未知数 c_i に対する 1 個の正規化条件と $(n-1)$ 個の同次線形方程式とからなる連立方程式であるから，必ず解がある．こうしてつくった関数 $\varphi(s)$ を $J(\varphi, \varphi)$ に代入すれば

$$J(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1}^{n} c_i c_k J(\psi_i, \psi_k)$$

が得られる．$J(\psi_i, \psi_i) = 1/\mu_i$, $J(\psi_i, \psi_k) = 0$ $(i \neq k)$ により，$\kappa_n = 1/\mu_n$ として

$$J(\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{\mu_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \kappa_i \geqq \kappa_n \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \kappa_n$$

が成り立つ．$J(\varphi, \varphi)$ の最大値は確かに κ_n 以上である．こうして，次の結果が得られた：核 $K(s, t)$ の第 n 番目の正の固有値は，関数 v_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ を変化させたとき $\kappa_n\{v_i\}$ が到達し得る最小の値 κ_n の逆数である．ここで $\kappa_n\{v_i\}$ は，正規化の条件 $(\varphi, \varphi) = 1$ および $(n-1)$ 個の制約条件 (51) を満たす引数関数 $\varphi(s)$ に対して $J(\varphi, \varphi)$ がとり得る最大値（または上限）である．この最大の最小は，$v_1 = \psi_1$, $v_2 = \psi_2$, …, $v_{n-1} = \psi_{n-1}$, $\varphi = \psi_n$ のときに達成される．

全く同じように，負の固有値とそれに属する固有関数 ψ_{-n} $(n > 0)$ は，対応する条件のもとでの $J(\varphi, \varphi)$ の最小の最大として定義される．

固有値の最大–最小性から容易に次の定理が導かれる：

《定理》 核 $K(s,t)$ に正定値の核 $K^+(s,t)$ あるいは負定値の核 $K^-(s,t)$ を加えたとき，核 $K+K^+$ あるいは $K+K^-$ の正および負の固有値は，それぞれ核 K の対応する固有値より大きくない，あるいは小さくない[6]．□

証明は，§1.4 と同じ考えによってなされる．

3.5 展開定理とその応用

3.5.1 展開定理

2次形式の主軸変換に対応して[7]，もし核が，各変数について一様収束の意味で，

$$K(s,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i} \tag{52}$$

の形に級数展開できるとすれば，任意の連続または区分的に連続な関数 $h(t)$ によって

$$g(s)=\int K(s,t)h(t)\,dt$$

という形に表わされる任意の関数 $g(s)$ は，級数

$$g(s)=\sum_{i=1}^{\infty}g_i\varphi_i(s),\quad g_i=(g,\varphi_i)=(h,\varphi_i)\frac{1}{\lambda_i} \tag{53}$$

のように展開できることになる．しかし，核の展開式 (52) は一般には成り立たないという事情があるので，$g(s)$ の展開が一般に成り立つことを証明するには，少しまわり道が必要になる．そこで，$h_i=(h,\varphi_i)$ を直交系 φ_1,

---

6 ［原註］Weyl, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstralung). Math. Ann. Bd. 71, pp. 441–479, 1912.

［訳註］核の定める積分作用素の固有値でいえば，$K+K^+$ の固有値は K の固有値より大きくなり，$K+K^-$ の固有値は K の固有値より小さくなる．核の固有値と積分作用素の固有値 $(\neq 0)$ とは互いに逆数だからである．

7 ［原註］§1.3 参照．

$\varphi_2, \ldots$ に関する h の展開係数，$g(s)$ を (53) により $h(s)$ の「積分変換」として表示された連続関数，そして

$$g_i = (g, \varphi_i) = \frac{h_i}{\lambda_i}$$

を g の展開係数とする．ベッセルの不等式によって級数 $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$ は収束する．§4.2 の不等式 (47) と (49) によって，和 $T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}$ は一様に収束し，s について一様に有界である．シュヴァルツの不等式によれば

$$\left[\frac{h_n\varphi_n(s)}{\lambda_n} + \cdots + \frac{h_m\varphi_m(s)}{\lambda_m}\right]^2 \leqq (h_n^2 + \cdots + h_m^2)\left(\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n^2} + \cdots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m^2}\right)$$

が成り立つ．

剰余 $h_n^2 + \cdots + h_m^2$ は n を十分大きくすれば，いくらでも小さくできる．また $\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda_n^2} + \cdots + \frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m^2}$ は s に無関係なある値以下におさえられているから，級数

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i\varphi_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(s)$$

は絶対かつ一様に収束する．その和

$$\gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g_i\varphi_i(s) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(s)$$

は s の連続関数である．そこで $\gamma(s)$ と $g(s)$ が恒等的に等しいことを示す必要がある．そのために，核

$$K_{(n)}(s,t) = K(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

をつくれば[8]

$$g(s) - \gamma_n(s) = \int K_{(n)}(s,t)h(t)\,dt$$

と書ける．これに s の任意の連続関数 $w(s)$ を乗じ，s で積分する．その結果の式

$$\int w(s)(g(s) - \gamma_n(s))\,ds = \iint K_{(n)}(s,t)h(t)w(s)\,ds\,dt$$

[8] ［原註］前に p. 139 で $K'_{(n)}$ と書いた関数を，これからはこのように書く．

の右辺は，§4.2 の関係式 (50) によって，n を増大させると 0 に収束する．$\gamma_n(s) \Rightarrow \gamma(s)$ であるから

$$\int w(s)\big(g(s)-\gamma(s)\big)\,ds = 0$$

が得られる．この等式は任意の $w(s)$ について成り立つから，$w(s)=g(s)-\gamma(s)$ とおいてもよい．従って $(g-\gamma, g-\gamma)=0$．これは，$g(s)-\gamma(s)$ の連続性により，$g(s)-\gamma(s)$ が恒等的に 0 であるときに限って成り立つ．これが証明したかったことである．以上で次の基本的な展開定理が得られた：

《定理》 区分的に連続な関数 $h(t)$ を用いて積分変換で (53) の形に表わされる連続関数 $g(s)$ はすべて，$K(s,t)$ の固有関数により一様かつ絶対収束する級数に展開可能である．□

3.5.2 非同次線形積分方程式の解法

上の定理の応用として，非同次の積分方程式

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

の解の公式を導こう．まずパラメータ λ の値が，どの固有値 λ_i にも等しくないと仮定する．展開係数 (φ,φ_i) をもつ連続関数 $\varphi(s)$ がこの積分方程式の解であると仮定する．すると関数 $\varphi(s)-f(s)=g(s)$ は，展開定理を，$h(t)=\lambda\varphi(t)$ にとって適用することにより，一様かつ絶対収束する級数

$$g(s)=\varphi(s)-f(s)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(s)=\lambda\int K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{54}$$

に展開できる．ここで $c_i=(g,\varphi_i)$ である．他方，(54) によって

$$\begin{aligned}c_i=(g,\varphi_i)&=\lambda\iint K(s,t)\varphi_i(s)\varphi(t)\,ds\,dt\\&=\frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi)=\frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i,f)+\frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i,g)\end{aligned}$$

であるから

$$c_i=f_i\frac{\lambda}{\lambda_i-\lambda}\quad(f_i=(\varphi_i,f)) \tag{55}$$

となる．従って，φ に対して級数展開

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(s) \tag{56}$$

が得られる．これは当然方程式 (1) の解を表わしているはずである．実際，その通りであることが次のようにしてわかる：

この級数は絶対かつ一様に収束する．なぜなら，i が十分大きければ $|\lambda_i - \lambda| > \frac{|\lambda_i|}{2}$ が成り立つから，展開のはじめのうちの有限個の項を除けば

$$2|\lambda| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f_i||\varphi_i(s)|}{|\lambda_i|}$$

という優級数が得られる．これが一様収束することはすでに証明ずみである．そこで級数 (56) を (1) の $\varphi(s)$ に代入すれば，方程式 (1) の成立が直ちにわかる．

§3.3 に述べた理論と一致する結果であるが，この解法は $\lambda = \lambda_i$ が固有値のときには失効する．ただし，そのような場合でも，$f(s)$ が λ_i に対して条件 $f_i = (f, \varphi_i) = 0$ を満たしている場合には有効である．

§3.3 の定理によると，λ が固有値のときには，$f(s)$ によっては積分方程式 (1) が解をもたないのであったので，ここでの解法による結果から，すでに得られた固有値 λ_i 以外には核の固有値はあり得ない．また，対称で実の核の固有値はすべて実であるという主張が，p. 140 における取り扱いとは独立な論法で明らかになったことになる．

3.5.3 反復核に対する双線形形式

展開定理の他の応用として $h(\sigma) = K(\sigma, t)$ とおいた場合を考察する．そうすると**反復核**

$$K^{(2)}(s,t) = \int K(s,\sigma)K(\sigma,t)\, d\sigma$$

に対して，展開式

$$K^{(2)}(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i} \int K(\sigma,t)\varphi_i(\sigma)\, d\sigma,$$

あるいは

$$K^{(2)}(s,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i^2} \tag{57}$$

が得られる．同様に高次の反復核

$$\begin{aligned}K^{(3)}(s,t)&=\int K^{(2)}(s,\sigma)K(\sigma,t)\,d\sigma\\&=\iint K(s,\sigma_i)K(\sigma_1,\sigma_2)K(\sigma_2,t)\,d\sigma_1\,d\sigma_2,\\&\ \vdots\\K^{(n)}(s,t)&=\int K^{(n-1)}(s,\sigma)K(\sigma,t)\,d\sigma\\&=\int\cdots\int K(s,\sigma_1)K(\sigma_1,\sigma_2)\cdots K(\sigma_{n-1},t)\,d\sigma_1\cdots d\sigma_{n-1}\end{aligned}$$

に対して，展開

$$K^{(n)}(s,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i^n}\qquad(n=2,3,\ldots) \tag{58}$$

が得られる．これらの収束はすべて絶対収束であり，さらに s についても，あるいは t についても一様，かつ，§3.5.4 で示すように，s と t を合わせた変数についても一様収束である．

(57) によって等式

$$K^{(2)}(s,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}$$

が成り立つ．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\left(K^{(2)}(s,s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i^2}\right)=0$$

である．しかし，これは

$$\lim_{n\to\infty}\int\left[K(s,t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}\right]^2dt=0 \tag{59}$$

を意味するものである．いいかえれば級数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ が $K(s,t)$ に平均収

束するということである．もしこの級数が s を一定にしたとき t について一様に収束し，従って，一定の s に対して t の連続関数 $L(s,t)$ を表わすときは $K=L$ でなければならない．なぜなら，そのときは (59) の極限を積分記号内でとることが許され，$\int [K(s,t)-L(s,t)]^2\,dt=0$ となり，これから $K=L$ がいえるから．

3.5.4 マーサーの定理

$n \geqq 2$ に対して成立する公式 (58) は，(一般には証明されない）方程式 (52) の代用とみなされるのが実状である．しかしながら重要な特別の場合について，次の定理を述べることはできる[9]：

《定理》 もし $K(s,t)$ が定値で連続な対称核であるか，あるいは他方の符号の固有値を有限個しかもたないかであるならば，展開式 (52) は成り立ち，しかも絶対かつ一様に収束する．□

これを証明するために，まず $K(s,t)$ は正定値であり，従って固有値 λ_i がすべて正であると仮定しよう．さて，すべての正定値の核 $H(s,t)$ は不等式 $H(s,s) \geqq 0$ を満たすことを前もって注意しておく．実際，もし $H(s_0,s_0)<0$ であったとすると，点 $s=s_0, t=s_0$ のごく小さな近傍，たとえば $|s-s_0| \leqq \varepsilon$, $|t-s_0| \leqq \varepsilon$ をとれば，そこでは $H(s,t)<0$ となる．次に，$|s-s_0| \leqq \varepsilon$ では $\varphi(s)=1$，その区間の外では $\varphi(s)=0$ により関数 $\varphi(s)$ を定義する．この関数については

$$\iint H(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt < 0$$

となり，H が正定値であるという仮定に反するからである．

この結果を，正定値の核

$$H = K(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$$

---

9 ［原註］Mercer, T.: Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. Trans. London Phil. Soc. (A) Bd. 209. pp. 415–446. 1909.

に当てはめると，

$$K(s,s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}\geqq 0.$$

従って，正項だけからなる級数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}$ は s の任意の値に対して収束する．次の不等式（シュヴァルツの不等式）

$$\left(\frac{\varphi_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}+\cdots+\frac{\varphi_m(s)}{\sqrt{\lambda_m}}\frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{\lambda_m}}\right)^2$$
$$\leqq\left(\frac{\varphi_n(s)^2}{\lambda}+\cdots+\frac{\varphi_m(s)^2}{\lambda_m}\right)\left(\frac{\varphi_n(t)^2}{\lambda_n}+\cdots+\frac{\varphi_m(t)^2}{\lambda_m}\right)$$

を考慮すれば，級数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ も絶対収束する．しかもこの級数は s を一定にすると t について一様に，また t を一定にすると s について一様に，収束する．つまりこの級数によって定義される関数は t が一定ならば s について連続，s が一定ならば t について連続である．それゆえ，§3.5.3 で述べたことによってこの関数は核 K に等しい．

最後に，この級数が t, s に両方の変数の関数とみなしても一様に収束することを確認しておこう．それには級数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)^2}{\lambda_i}$ の収束の一様性を上の不等式によって証明すればよい．しかしいま証明したことにより，この級数は $K(s,s)$ に等しく，それは連続関数である．ここで次の定理[10]が成り立つ：

《定理》 もし変数の正の連続関数を項とする級数が連続関数に収束するならば，その級数の収束は問題にしている区間で一様である．□

この定理を適用すれば，求める結果が直ちに導かれる．

有限個数の負の固有値が現れても，級数 (52) の収束については何の影響も及ぼさない．なぜなら，核は負の固有値に属する $\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ の項を引き去れば正定値にすることができるからである．こうして所望の収束定理が完全に証明された．

---

[10] ［原註］p. 61 脚注 8 参照．
［訳註］ディニの定理である．

3.6 ノイマン級数と解核

これまで述べてきた積分方程式の理論は，解を任意の精度で計算するための具体的な方法を示しながら，積分方程式の解法を与えている（なお§3.8も参照）．しかし，第1章の1次方程式論で得たような，美しい閉じた形の解を与えるには至っていない．実は，解を具体的な形に書くことが，第1章のときと全く同様に可能なのである．すなわち積分方程式 (1) の f と φ の項を入れ換えて書き直してから，積分記号の中の $\varphi(t)$ に (1) による表現を代入するという手順を続行するのである．反復核を使って結果を書けば

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= f(s) + \lambda \int K(s,t) f(t)\,dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t)\varphi(t)\,dt \\ &= f(s) + \lambda \int K(s,t) f(t)\,dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t) f(t)\,dt \\ &\quad + \lambda^3 \int K^{(3)}(s,t)\varphi(t)\,dt \\ &= \cdots\end{aligned}$$

となり，第1章と全く同じように，解が無限級数

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t) f(t)\,dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t) f(t)\,dt + \cdots \tag{60}$$

の形に得られることがわかる．ただしこの級数が一様に収束するとしてのことである．すなわち

$$\mathsf{K}(s,t) = K(s,t) + \lambda K^{(2)}(s,t) + \lambda^2 K^{(3)}(s,t) + \cdots \tag{61}$$

の一様収束性を仮定するならば，積分方程式

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

の解は**逆積分方程式**

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int \mathsf{K}(s,t) f(t)\,dt \tag{62}$$

によって表わされる．このことから，$\mathsf{K}(s,t) = \mathsf{K}(s,t;\lambda)$ という関数を**解核**，**逆核**，あるいは**リゾルベント**と呼ぶ．

級数 (60) または (61) を**ノイマン級数**と呼ぶ．この級数は十分小さい $|\lambda|$ の値，たとえば，(積分区間の幅が1のとき) M を $K(s,t)$ の絶対値の上界とするとき $|\lambda| < \frac{1}{M}$ に対しては一様収束する．従って解核は $|\lambda|$ が十分小さいとき λ の解析関数である．次に，解核が次の関係を満たすことは，直接代入すれば直ちにわかる：

$$
(63)\qquad \begin{cases} \mathsf{K}(s,t;\lambda) = K(s,t) + \lambda \displaystyle\int K(s,\sigma)\mathsf{K}(\sigma,t;\lambda)\,d\sigma \\ \mathsf{K}(s,t;\lambda) = K(s,t) + \lambda \displaystyle\int K(\sigma,t)\mathsf{K}(s,\sigma;\lambda)\,d\sigma\,. \\ \mathsf{K}(s,t;\lambda) - \mathsf{K}(s,t;\lambda') = (\lambda-\lambda') \displaystyle\int \mathsf{K}(s,\sigma;\lambda)\mathsf{K}(\sigma,t;\lambda')\,d\sigma \end{cases}
$$

もし核 $K(s,t)$ が対称ならば，解核を最も注目するべき形に書くことができる．すなわち，λ に対する関数 K の依存の仕方が明瞭に読み取れる形に書くことができる．実際，対称核 $K^{(2)}(s,t)$, $K^{(3)}(s,t)$, ... の展開 (58) に注意し，(61) に現れる幾何級数の和をつくれば，直ちに

$$
(64)\qquad \mathsf{K}(s,t;\lambda) = K(s,t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}
$$

が得られる．§3.5.1 と §3.5.2 で行なったものと全く同様な論法により，右辺の級数の和は固有値でない任意の λ に対して収束し，しかも収束は s と t に関して一様である．

最初はノイマン級数 (61) が収束するという仮定だけのもとに導かれた関係 (64) であるが，それは解核 $\mathsf{K}(s,t;\lambda)$ を複素 λ 平面全域に解析接続した結果を与えている．そのとき固有値 λ_i はすべて単純な極として現れる．こうして (64) は解核の部分分数展開を表わしていることになる．結果は次のようにまとめられる：

《定理》 対称核の解核は λ の有理型関数であって，積分方程式の固有値の位置に単純な極をもつ．□

さらに，極 λ_i における留数はこの固有値に属する固有関数を与える．ノイマン級数と (64) の形から，ノイマン級数の収束半径は固有値の絶対値の最小値に等しいことがわかる．

一般的な関数論の定理によれば，有理型関数である解核 $\mathsf{K}(s,t;\lambda)$ は，2つの超越整関数の比として表わされる．これらの整関数は，いたる所で収束するベキ級数で表わされ，その係数は与えられた核から直接に求め得るはずである．代数的な場合については，§1.2 で公式を与えたが，いまの場合も類似の公式の成り立つことが予想できる．さらにこれらの公式は，対称核だけに限られるものでなく，任意の非対称な連続核に対しても成り立つことを期待してよいであろう．これらの関係はフレドホルムが実際に導き，理論の出発点としたものである．このフレドホルムの公式が，核 $K(s,t)$ を退化核 $A_n(s,t)$ によって一様に近似し，$n\to\infty$ の極限をとることによって，ごく自然に導かれることを次節で示そう[11].

3.7 フレドホルムの公式

本書では，この後フレドホルムの公式を使わないので，以下の議論の中で出てくる行列式の計算のいくつかについては読者にまかせる[12].

本質的には §1.2 で述べた論法と同じ記号を用いる．退化核

$$K(s,t)=A(s,t)=\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(s)\beta_p(t)$$

に対して前のときと同様 $x_p=(\varphi,\beta_p)$ とおくならば，積分方程式

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

は

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{p=1}^{n}x_p\alpha_p(s)=f(s)+\lambda E(x,\alpha(s)) \tag{65}$$

---

11 ［原註］この方法ははじめ Goursat, E.（グルサ）によって論文：Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm, Bull. Soc. math. France, Bd. 35, pp. 163–173 において用いられた．なお Lebesgue, H.: Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm, Bull. Soc. math. France, Bd. 36, pp. 3–19.

12 ［原註］あとは Kowalewski, G: Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig. 1909.

［訳註］一般の読者としてはとりあえず結果を承認して読み進むことが実際的であろう．

と書きかえられる．前の記号 $y_p = (f, \beta_p)$, $k_{pq} = (\alpha_q, \beta_p)$ を使えば，x_p に対する連立方程式

$$y_p = x_p - \lambda \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q \tag{66}$$

が得られる．これの解は

$$E(x, u) = -\frac{\Delta(y, u; \lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

で与えられるのであり，それによって (1) は

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= f(s) + \lambda E(x, \alpha(s)) \\ &= f(s) - \lambda \frac{\Delta(y, \alpha(s); \lambda)}{\Delta(\lambda)} \end{aligned} \tag{67}$$

と解かれる．ここで次の展開式が役に立つ：

$$\begin{cases} \Delta(y, u; \lambda) = \Delta_1(y, u) - \Delta_2(y, u)\lambda + \cdots + (-1)^{n-1}\Delta_n(y, u)\lambda^{n-1}, \\ \Delta(\lambda) = 1 - \Delta_1\lambda + \cdots + (-1)^n \Delta_n \lambda^n. \end{cases} \tag{68}$$

ただし，

$$\begin{cases} \Delta_h(y, u) = \sum \begin{vmatrix} 0 & u_{p_1} & u_{p_2} & \cdots & u_{p_h} \\ y_{p_1} & k_{p_1 p_1} & k_{p_1 p_2} & \cdots & k_{p_1 p_h} \\ y_{p_2} & k_{p_2 p_1} & k_{p_2 p_2} & \cdots & k_{p_2 p_h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p_h} & k_{p_h p_1} & k_{p_h p_2} & \cdots & k_{p_h p_h} \end{vmatrix}, \\ \Delta_h = \sum \begin{vmatrix} k_{p_1 p_1} & k_{p_1 p_2} & \cdots & k_{p_1 p_h} \\ k_{p_2 p_1} & k_{p_2 p_2} & \cdots & k_{p_2 p_h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p_h p_1} & k_{p_h p_2} & \cdots & k_{p_h p_h} \end{vmatrix} \end{cases} \tag{69}$$

である．上式の和に関する添字 $p_1, p_2, \ldots, p_h$ は $p_1 < p_2 < \cdots < p_h$ という条件のもとで独立に 1 から n まで動く．

行列式の和 $\Delta_h(y, \alpha(s))$ は明らかに $\int \Delta_h(\beta(t), \alpha(s)) f(t)\, dt$ の形に書くこ

とも可能であり，それに応じて積分方程式の解 (67) が解核

$$\mathsf{K}(s,t;\lambda) = -\frac{\Delta(\beta(t),\alpha(s);\lambda)}{\Delta(\lambda)} = -\frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{70}$$

を用いて

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda\int \mathsf{K}(s,t;\lambda)f(t)\,dt \tag{62$'$}$$

の形に得られる．

式 (69) の右辺の和をとる際に，前に課しておいた条件 $p_1 < p_2 < \cdots < p_h$ を取り除いて，その代わりに 1, 2, …, n から h 個をとった順列すべてにわたっての和をとり，重複を考えに入れて $h!$ で割っておいてもよい．このことと k_{pq} の定義とを考慮し，行列式論の簡単な定理を使えば，次の公式が得られる：

$$\tag{71} \left\{\begin{aligned} D(s,t;\lambda) &= \Delta(\beta(t),\alpha(s);\lambda) \\ &= D_0(s,t) - \frac{1}{1!}D_1(s,t)\lambda + \frac{1}{2!}D_2(s,t)\lambda^2 - \cdots \\ &\qquad + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}D_{n-1}(s,t)\lambda^{n-1}, \\ D(\lambda) &= \Delta(\lambda) = 1 - \frac{1}{1!}D_1\lambda + \frac{1}{2!}D_2\lambda^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}D_n\lambda^n. \end{aligned}\right.$$

上で簡単のために用いた記号は次の積分を表わす ($h = 1, 2, \ldots, n$)：

(72)

$$\left\{\begin{aligned} D_h(s,t) &= \int\!\cdots\!\int \begin{vmatrix} A(s,t) & A(s,s_1) & \cdots & A(s,s_h) \\ A(s_1,t) & A(s_1,s_1) & \cdots & A(s_1,s_h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(s_h,t) & A(s_h,s_1) & \cdots & A(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1\,ds_2\cdots ds_h, \\ D_h &= \int\!\cdots\!\int \begin{vmatrix} A(s_1,s_1) & A(s_1,s_2) & \cdots & A(s_1,s_h) \\ A(s_2,s_1) & A(s_2,s_2) & \cdots & A(s_2,s_h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(s_h,s_1) & A(s_h,s_2) & \cdots & A(s_h,s_h) \end{vmatrix} ds_1\,ds_2\cdots ds_h. \end{aligned}\right.$$

なお，$D_0(s,t) = A(s,t)$ である．

こうして，λ の有理型関数 $D(s,t;\lambda)$ と $D(\lambda)$ が核を用いて具体的に表わされる．なお，式 (71) の表現を形式的には無限級数にまで拡張してもよい．なぜなら，退化核 $A(s,t)=\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(s)\beta_p(t)$ に対しては，(72) の D_h は $k>n$ のとき，また $D_h(s,t)$ は $h>n-1$ のとき，すべて 0 となるからである．

さて，任意の連続核 $K(s,t)$ を退化核で一様に近似すれば，対応する式 (72) の各式は $K(s,t)$ の対応する行列式のそれに収束する．式 (72) において A の代わりに K を用いてつくった無限級数

$$
\text{(73)}\qquad \begin{cases} D(s,t;\lambda)=D_0(s,t)-\dfrac{1}{1!}D_1(s,t)\lambda+\cdots \\ \qquad D(\lambda)=1-\dfrac{1}{1!}D_1\lambda+\dfrac{1}{2!}D_2\lambda^2-\cdots \end{cases}
$$

は，退化していない核 $K(s,t)$ に対して，超越整関数となる．このことを見るには，これが λ のすべての値に対して収束することを示せばよい．いま，すべての s, t に対して $|K(s,t)|\leqq M$ であるような M をとれば，行列式に対するアダマールの評価（§1.5.2 参照）により

$$
|D_h(s,t)|\leqq\sqrt{(h+1)^{h+1}}M^{h+1}(b-a)^h,
$$
$$
|D_h|\leqq\sqrt{h^h}M^h(b-a)^h
$$

である．そこで級数

$$
\sum_{h=0}^{\infty}\sqrt{(h+1)^{h+1}}M^{h+1}(b-a)^h\frac{\lambda^h}{h!},\quad 1+\sum_{h=1}^{\infty}\sqrt{h^h}M^h(b-a)^h\frac{\lambda^h}{h!}
$$

を考えると，どちらも λ のあらゆる値に対して収束し[13]，しかも上の級数 (73) の各項を絶対値におきかえた級数の優級数である．これで主張が証明された．これから，λ のあらゆる値に対して，一様収束の意味で

$$
\lim_{n\to\infty}D_n(s,t;\lambda)=D(s,t;\lambda),\quad \lim_{n\to\infty}D_n(\lambda)=D(\lambda)
$$

であることが導かれる．ここで添字 n をもつ量は n 番目の近似退化核 $A_n(s,t)$

---

13 ［原註］すなわち，e^h の展開式には $\frac{h^h}{h!}$ という項が現れるから，$\frac{1}{h!}<\frac{e^h}{h^h}$ が成り立つ．それゆえ 2 番目の級数の λ^h の係数の h 乗根は $\frac{M(b-a)e}{h^{\frac{1}{2}}}$ より小さく，従って $h\to\infty$ のとき 0 に収束する．また，同じことが 1 番目の級数に対しても成り立つ．

に関するもの，添字なしの量は $K(s,t)$ に関するものである．従って，$D(\lambda)$ の零点 λ_i 以外の λ に対してならば，$K(s,t)$ の解核は

$$(74)\qquad \mathsf{K}(s,t;\lambda) = -\frac{D_0(s,t) - \dfrac{1}{1!}D_1(s,t)\lambda + \cdots}{1 - \dfrac{1}{1!}D_1\lambda + \dfrac{1}{2!}D_2\lambda^2 - \cdots} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{K}_n(s,t;\lambda)$$

となり，任意の核 $K(s,t)$ に対する解の公式

$$(75)\qquad \varphi(s) = f(s) + \lambda\int \mathsf{K}(s,t;\lambda)f(t)\,dt$$

が得られる．

上の公式を，その発見者にちなんで**フレドホルムの公式**と呼ぶ．明らかに

$$(76)\qquad D_h = \int D_{h-1}(s,s)\,ds$$

の関係が成り立つ．

さらに[14]

$$(77)\qquad D'(\lambda) = -\int D(s,s;\lambda)\,ds$$

および，m 階の導関数に対して一般に

$$(78)\qquad D^{(m)}(\lambda) = (-1)^m\int\cdots\int D\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \\ s_1, s_2, \ldots, s_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) ds_1\,ds_2\cdots ds_m$$

が成り立つことも述べておこう．ただし，記号の意味は次式の通りである．

$$(79)\qquad D\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \\ t_1, t_2, \ldots, t_m \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) = \sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^h}{h!}D_h\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \\ t_1, t_2, \ldots, t_m \end{pmatrix}$$

および

---

14 ［原註］Fredholm, L.：前掲書.

(80)

$$\begin{cases} D_h\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_m \\ t_1, t_2, \ldots, t_m \end{pmatrix} = \\ \displaystyle\int\cdots\int \begin{vmatrix} K(s_1,t_1)\cdots K(s_1,t_m) & K(s_1,\sigma_1)\cdots K(s_1,\sigma_h) \\ K(s_2,t_1)\cdots K(s_2,t_m) & K(s_2,\sigma_1)\cdots K(s_2,\sigma_h) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ K(s_m,t_1)\cdots K(s_m,t_m) & K(s_m,\sigma_1)\cdots K(s_m,\sigma_h) \\ K(\sigma_1,t_1)\cdots K(\sigma_m,t_m) & K(\sigma_m,\sigma_1)\cdots K(\sigma_m,\sigma_h) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ K(\sigma_h,t_1)\cdots K(\sigma_h,t_m) & K(\sigma_h,\sigma_1)\cdots K(\sigma_h,\sigma_h) \end{vmatrix} d\sigma_1\, d\sigma_2 \cdots d\sigma_h. \end{cases}$$

さらに，$D(\lambda)$ の零点 $\lambda = \lambda_i$ が解核 $\mathsf{K}(s,t;\lambda)$ の 1 次の極であるときには，λ_i に属する固有関数は解核の留数を求めることによって得られることをつけ加えておこう．その証明は上の公式から容易に示される[15]．

3.8　理論の新しい基礎づけ

積分方程式の一般理論を基礎づけるにあたって，本書では §2.2 で述べた収束原理にもとづく事実，すなわち，近似的な積分方程式の解のうちから与えられた積分方程式の解に一様収束する列を選び出せることで満足した．しかしそれとは別に，§2.3 で導入した関数列の独立度および漸近次元数という概念を用いれば，積分方程式論を新しい方法で組み立てることもできるし，また近似方程式の解の全体の近似をすすめるにつれての収束性を，完全に見通す可能性が開けるのである．それにつれて新しい注目に値する見方や結果が得られるので，以下にこの方法についてもここで紹介するべきであろう．

---

[15] ［原註］フレドホルムの理論の形式的な骨組みの詳細については，たとえば Kowalewski, G.: Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig, 1909 参照.

3.8.1 補助定理

§2.3 で述べた概念を積分方程式論に応用するには，次の補助定理が基礎になる：

《定理》 $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots$ をノルム平方が一定の限界 M 以下で，しかも一様収束の意味で

$$\psi_n(s) - \lambda \int K(s,t)\psi_n(t)\,dt \Longrightarrow 0 \tag{81}$$

が成り立つような関数列であるとする．このとき，関数 $\psi_n(s)$ は，有限漸近次元数 r の滑らかな関数列をなす．□

これを証明するために，まず (81) の関係が関数 $\psi_n(s)$ を $\chi_n(s) = x_1\psi_{n_1} + x_2\psi_{n_2} + \cdots + x_p\psi_{n_p}$ で表わされる関数 $\chi_n(s)$ におきかえても成り立つことに注目しよう．ただし係数 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ の絶対値は有界とし，関数

$$\psi_{n_1},\ \psi_{n_2},\ \ldots,\ \psi_{n_p}$$

は，関数列 ψ_n の中の任意の p 個の関数であるが，添字 n_i は n とともに無限に増大するものとする．

さて，関数 $\psi_n(s)$ について，添字 n が限りなく大きくなる r 個の関数の組で，その独立度が一定値 α 以上であるようなものが存在する，いいかえればもとの関数列の漸近次元数が r 以上である組としよう．そのときには，上に述べた組をそれぞれの中で直交化すれば，§2.3.1 により，現れる係数の絶対値はすべて $1/\sqrt{\alpha}$ 以下としてよい．こうして，それぞれ r 個ずつの，互いに直交正規な関数の組 $\omega_{n,i}(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ で，極限方程式

$$\lim_{n\to\infty}\left(\omega_{n,i}(s) - \lambda \int K(s,t)\omega_{n,i}(t)\,dt\right) = 0 \tag{82}$$

が s について一様に成り立つものが得られる．ここでベッセルの不等式を使ういつもの推論を行なえば[16]，すべての n に対して

$$\iint K(s,t)^2\,ds\,dt \geqq \sum_{i=1}^{r} \int \left[\int K(s,t)\omega_{n,i}(t)\,dt\right]^2 ds,$$

---

16 ［原註］§3.4.2, p. 139 参照.

従って (82) により

$$\iint K(s,t)^2\,ds\,dt \geqq \frac{r}{\lambda^2}$$

が得られる．こうして関数列の漸近次元数の限界がわかり，それが有限であることが示された．この関数列が滑らかであることは，積分変換の形で与えられた一様近似の表式 (82) から容易にわかる．すなわち，まず ε_n を n が増大するとき 0 に近づく数として，シュヴァルツの不等式から

$$\psi_n(s)^2 \leqq M\lambda^2 \int K(s,t)^2\,dt + \varepsilon_n$$

が得られるが，これは $\psi_n(s)$ の一様有界性を意味する．次に，同じように $\int(x_1\psi_{n_1} + \cdots + x_p\psi_{n_p})^2\,ds < \varepsilon$ から

$$(x_1\psi_{n_1} + \cdots + x_p\psi_{n_p})^2 \leqq \varepsilon\lambda^2 \int K(s,t)^2\,dt + \varepsilon_n$$

という関係が得られる．これで関数列の滑らかさが示された．

3.8.2　対称核の固有関数

上で証明した補助定理を応用して，退化した対称核 $A_n(s,t)$ によって一様に近似される対称核 $K(s,t)$ の固有関数を求めよう．前と同じく $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots$ および $\mu_{-1}^{(n)}, \mu_{-2}^{(n)}, \ldots$ をそれぞれ $A_n(s,t)$ の正および負の固有値とし，$\psi_1^{(n)}$, $\psi_2^{(n)}, \ldots$ および $\psi_{-1}^{(n)}, \psi_{-2}^{(n)}, \ldots$ を対応する固有関数とする．多重の固有値はその重複の数だけ並べておく．さらに，$J_n(\varphi,\varphi) = \iint A_n(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt$ および $J(\varphi,\varphi) = \iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt$ を核 $A_n(s,t)$ および $K(s,t)$ にそれぞれ対応する積分形式とし，$J(\varphi,\varphi)$ は正の値をとり得ると仮定して話を進めよう．そうでなければ，核の符号を変えて考える．そうすると，$\kappa_1^{(n)} = 1/\mu_1^{(n)}$ は正規化された関数 φ に対する $J_n(\varphi,\varphi)$ の最大値である．正規化条件のもとでの $J(\varphi,\varphi)$ の上限を $\kappa_1 = 1/\mu_1$ としよう．$J(\varphi,\varphi)$ と $J_n(\varphi,\varphi)$ の値の差は十分大きい n に対してはいくらでも小さくできる．従って $\lim_{n\to\infty}\mu_1^{(n)} = \mu_1$ でなければならない．このことと $\psi_1^{(n)}(s) - \mu_1^{(n)}\int A_n(s,t)\psi_1^{(n)}(t)\,dt = 0$ および $A_n(s,t) \Rightarrow K(s,t)$ とから

$$\psi_1^{(n)}(s) - \mu_1 \int K(s,t)\psi_1^{(n)}(t)\,dt \Longrightarrow 0 \tag{83}$$

が得られる．従って，関数 $\psi_1^{(n)}$ は，前述の補助定理により，正で有限の次元 r をもつ滑らかな関数列をなす．——r が 0 になることは $\psi_1^{(n)}(s)$ が正規化されていることに反する．——そうして，この関数列は §2.3 により，正規直交系 $\psi_{1,1}(s), \ldots, \psi_{1,r}(s)$ が張る線形集合を定める．これらは，同次積分方程式

$$\psi_{1,i}(s) = \mu_1 \int K(s,t)\psi_{1,i}(t)\,dt \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

を満たしているので，固有値 μ_1 に属する $K(s,t)$ の固有関数である．

全く同様に，核 $K(s,t)$ の他の固有値と固有関数が得られる．すなわち，付帯条件 $(\varphi, \varphi) = 1$ および $(\varphi, v_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, h-1)$ のもとで $J_n(\varphi, \varphi)$ がとる最大値のうちで，$v_1(s)$, $v_2(s)$, ..., $v_{h-1}(s)$ を変えたときの最小値を $\kappa_h^{(n)} = 1/\mu_h^{(n)}$ とする．

また $\kappa_h = 1/\mu_h$ を同様にして定義された $J(\varphi, \varphi)$ の上限の下限とすれば，$J_n(\varphi, \varphi)$ の値域と $J(\varphi, \varphi)$ の値域の差が小さいことから，やはり $\lim_{n\to\infty} \mu_h^{(n)} = \mu_h$ が成り立つ．これから

$$\psi_h^{(n)}(s) - \mu_h \int K(s,t)\psi_h^{(n)}(t)\,dt \Longrightarrow 0$$

がいえるので，以下の議論は上と同様に進む．負の固有値およびそれに属する固有関数を得るには，対応して，最小あるいは最大・最小問題を考えなければならない．いずれの符号についても，もし固有値が有限個しか現れないのであれば，その符号をもつ固有値を探すのはそこで終わりとなる．

3.8.3 非対称核

非対称核の積分方程式 (1) の場合にも，いま述べた方法は，以前の方法に対して，基本的に簡単化と深化をもたらす．ここでは，以前の記号をそのまま使って簡単な注意を述べるにとどめよう．

場合 I においては，すべての n に対してノルム平方 c_n^2 が M 以下であるように ρ_n と c_n とが定まっているとする．そのときには差 $\rho_n - \rho_m = \zeta_{n,m}$ のノルム平方も有界で，$4M$ 以下である．さらに s について一様に

$$\lim_{n,m\to\infty} \left[\zeta_{n,m}(s) - \lambda \int K(s,t)\zeta_{n,m}(t)\,dt\right] = 0$$

である．従って，前出の補助定理によれば，2重数列 $\zeta_{n,n}$ の部分列で，n, m が共に無限に増大するものはすべて有界な漸近次元 r をもっており，その r に対する上限は核 $K(s,t)$ と λ にのみ依存する．ここで，もしあらゆる部分列の漸近次元が0となる，すなわち $\zeta_{n,m} \Rightarrow 0$ である場合を別とすれば，この2重数列 $\zeta_{n,m}$ は，その極限の集合（§2.3参照）として r 個の直交する関数 $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_r(s)$ が張る線形集合を定める．例外的な $r = 0$ の場合には $\rho_n(s)$ は積分方程式

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

の解にただ収束するだけである．$r > 0$ の場合には，$\psi_i(s)$ は同次方程式の解である．ρ_n を $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_r(s)$ に直交する関数

$$\eta_n(s) = \varrho_n(s) + x_1\psi_1(s) + \cdots + x_r\psi_r(s)$$

におきかえれば，確かに

$$\left[\eta_n(s) - \lambda \int K(s,t)\eta_n(t)\,dt\right] - f(s) \Longrightarrow 0$$

が成り立つ．そこで前と同様差 $\eta_n - \eta_m = \zeta_{n,m}$ に前述の補助定理を適用すれば，この列のどの部分列の次元数も0でなければならないこと，従って関数 $\eta_n(s)$ は $\psi_n(s)$ に直交する積分方程式の1つの解に一様収束することが容易に結論できる．

場合IIについても，同じように補助定理を用いれば，関数列 $\sigma_n(s) = \rho_n(s)/c_n$ の極限集合として同次積分方程式の解の線形集合を得ることができる．

このようにして，第2の方法によれば，事情を支配する収束の仕方を，より精密に見て取ることができる．そして，核 $A_n(s,t)$ をもつ近似積分方程式を考察すれば非同次，同次のいずれであっても積分方程式の解が任意の近似度で実際に得られることが理解されるのである．

3.8.4　固有値と固有関数が核に連続的に依存すること

積分方程式の問題の解がどの程度に核とともに連続して変化するかという問

いに関して，対称核 $K(s,t)$ の固有値問題に話題を限ろう．核 $K(s,t)$ が他の対称核 $K_n(s,t)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ の一様な極限であるとする．条件 $(\varphi,\varphi) \leqq M$ を満たす関数 $\varphi(s)$ に対して，これらの核に属する積分形式 $J_n(\varphi,\varphi)$ と $J(\varphi,\varphi)$ の値は，n を十分大きくとればその差を任意に小さくできる．従って，このことは付帯条件 $(\varphi,\varphi)=1$, $(\varphi,v_i)=0$ のもとでのこれらの積分形式の最小または最大について，また同じく最小の最大，または最大の最小についても同様である．いいかえると，**h 番目の正の固有値および h 番目の負の固有値は，核とともに連続的に変わる**．固有関数については，符号が任意であること，多重の固有値があり得ることを考えると，文字通りの連続性は期待できない．これについては次の事柄がいえる：

《定理》 λ_h を核 $K(s,t)$ の r 重の固有値とする．すなわち

$$\lambda_h = \lim_{n\to\infty} \lambda_h^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \lambda_{h+1}^{(n)} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \lambda_{h+r-1}^{(n)}$$

は成り立つが，この関係は $\lambda_{h-1}^{(n)}$ と $\lambda_{h+r}^{(n)}$ に対してはもはや成り立たないとする．そのときには，n が無限大まで増すとともに核 $K_n(s,t)$ の固有関数 $\psi_h^{(n)}(s)$, ..., $\psi_{h+r-1}^{(n)}(s)$ が張る線形集合は，核 $K(s,t)$ の固有値 λ_h に属する固有関数の線形集合に一様に収束する[17]．□

この定理は，いま問題にしている固有関数の連続性の完全な表現なのであるが，証明は次のようにすれば難しくない．すなわち，固有関数の列 $\psi_{h+k}^{(n)}(s)$ $(0 \leqq k < r)$ に対して極限方程式

$$\left[\psi_{h+k}^{(n)}(s) - \lambda_h \int K(s,t)\psi_{h+k}^{(n)}(t)\,dt\right] \Longrightarrow 0$$

が成り立つことと，この関数列の漸近次元が r であることに注意して，さらに補助定理を用いるのである．

3.9　理論の成立限界の拡張

§3.1 から §3.6 まで，および §3.8 に述べたことは 2 つの方向へ本質的に拡張される．

17　［原註］線形集合の収束の概念については §2.3.2 参照．

まずすべての考察が多変数，たとえば m 独立変数の関数の積分方程式に対しても当てはまる．たとえば記号 $f(s)$ と $\varphi(s)$ で，有限の定領域 G 内を動く変数 $s_1, s_2, \ldots, s_m$ の連続関数を，また $K(s,t)$ で，同じく領域 G 内を動く両変数 $s_1, s_2, \ldots, s_m$ と $t_1, t_2, \ldots, t_m$ の連続関数を，最後に，G の体積要素を $ds = ds_1 ds_2 \cdots ds_m$, $dt = dt_1 dt_2 \cdots dt_m$ で表わすことにし，かつすべての積分は領域 G の全体にわたる積分と考える．そうすると，積分方程式

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

は $2m$ 個の変数の $K(s,t)$ を核にもち，m 個の変数の関数 $\varphi(s)$ を未知関数とする積分方程式を表わし，いままでの全理論がそのまま成り立つ．

さらに，これまで仮定してきた核の連続性という条件を相当緩めても，得られる結果にはそれほど変更を加えないですむ．ここでは理論を極力一般化することは目標とせずに，むしろ応用上重要な場合だけに注意を向けることにする．そこで，再び2変数 s と t の核 $K(s,t)$ を考察する．マーサー (Mercer) の定理 (§3.5.4) に至る議論を別にすれば，以前の我われの議論は，本質的な変更を加えないでも区分的に連続な核についても成り立つ．なぜなら，前章で見たように，そのような関数はすべて連続関数によって任意の精度で平均近似ができるからである．さらに，核が無限大になる点があっても差支えない．ただし，積分

$$\iint K(s,t)^2\,ds\,dt, \quad \int K(s,t)^2\,ds, \quad \int K(s,t)^2\,dt$$

が意味をもつこと，およびあとの2つの積分が t または s の関数として値が一定の限界を超えないことを仮定する．この仮定はたとえば応用上重要な次のような場合には満たされている．核が $s = t$ に対して $\frac{1}{2}$ 次よりも低い無限大であるとき，すなわち K が $K(s,t) = H(s,t)|s-t|^{-\alpha}$ の形に表わされ，そこで $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}$, $H(s,t)$ はいたる所連続な関数となっている場合である．そのような核に対しては前に得た定理が成り立つ．なぜなら，その核を連続な退化核 $A_n(s,t)$ によって以下の条件が満たされるように近似することができるからである：すなわち，$n \to \infty$ のとき $\int [K(s,t) - A_n(s,t)]^2\,dt$ は s について一様にいくらでも小さくなる．また $|\eta|$ を十分小さくすれば $\int [A_n(s+\eta,t) - A_n(s,t)]^2\,dt$ は s と n について一様にいくらでも小さくなる．我われの議論を進めてゆく

上では，これ以外のことは何も必要でない．同じように，独立変数が 2 個の場合には，核が，$s_1 = t_1$, $s_2 = t_2$ のとき 1 次より低い次数の無限大であればよい．この特異性ならば積分 $\iint K(s_1, s_2, t_1, t_2)^2\, ds_1\, ds_2$ を扱う妨げにならないからである．独立変数が 3 個の場合には K に対しては $\frac{3}{2}$ 次より低い特異性なら許され，一般に n 変数の場合には $\frac{n}{2}$ 次より低ければ許される．

ここで証明なしに言及するだけにとどめるが，$K(s,t)^2$ の積分に関する上の仮定だけを満たす積分方程式に我われの理論を，そのほかの核の連続性などの条件を加えることなしに，拡張するのは困難なことではない．

3.10　第 3 章への補足と問題

3.10.1　例

(a) 核

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ns \sin nt}{n} = \frac{1}{2} \log \left| \sin \frac{s+t}{2} : \sin \frac{s-t}{2} \right| \qquad (0 \leqq s, t \leqq \pi)$$

は固有値 $\lambda_n = 2n/\pi$ および固有関数 $\sin nt$ をもつ．

(b) 対称核

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1 - h^2}{1 - 2h\cos(s-t) + h^2} \qquad (0 \leqq s, t \leqq 2\pi)$$

は $|h| < 1$ のとき関数 $1, \sin ns, \cos ns$ を固有関数として，$1, 1/h^n, 1/h^n$ をそれに対応する固有値としてもつ[18]．

(c) 対称核

$$K(s,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{s^2+t^2}{2}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\tau^2} d\tau \int_{t}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \qquad (s \leqq t)$$

については，固有関数はエルミートの直交関数 $e^{\frac{s^2}{2}} \frac{d^n}{ds^n} e^{-s^2}$，固有値は $\lambda_n = 2n + 2$ である．

18　［訳註］原著では，このことを示せとの問いになっている．

(d) 対称核

$$K(s,t) = e^{\frac{s+t}{2}} \int_t^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau}\, d\tau \qquad (0 \leqq s \leqq t)$$

については，固有関数はラゲールの直交関数 $e^{-\frac{s}{2}} \frac{\partial^n}{\partial h^n} \frac{e^{-\frac{sh}{1-h}}}{1-h}\Big|_{h=0}$，固有値は $\lambda_n = n+1$ である[19].

3.10.2　特異積分方程式

核が高次の特異性をもっているとき，あるいは，基本領域が無限に広い場合に核が無限遠で 0 に近づく速さが——上の §3.10.1 に出てきた核と異なって——遅いときには，一般理論は成立しない．

固有値が無限大の多重度をもつ積分方程式の例をいくつか挙げよう．

積分公式

$$\int_0^{\infty} \sin st \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-at} + \frac{t}{a^2+t^2} \right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2+s^2}$$

は，正の a について恒等的に成り立つから，基本領域 $0 \leqq s, t < \infty$ において核 $\sin st$ は無限多重の固有値 $\lambda = 1$ をもつ．

エルミートの直交関数（§3.10.1 (c) 参照）は核 e^{ist} の固有関数で，固有値 $\frac{i^{-n}}{\sqrt{2\pi}}$ をもつ．従って 4 個の数 $\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \pm\frac{i}{\sqrt{2\pi}}$ のどれもがこの核の無限多重の固有値である．

有限区間内に無限の固有値をもつ積分方程式[20]の例としては

$$\varphi(s) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s-t|} \varphi(t)\, dt$$

がある．この方程式の解は $e^{\alpha is}$ で，固有値は $\lambda = \frac{1+\alpha^2}{2}$ である．それゆえ $\lambda > \frac{1}{2}$ の数はどれも固有値である．

---

19 ［原註］Neumann, R.: Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen usw. Diss. Breslau, 1912.

20 ［原註］同種の積分方程式が Hopf, E.: Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern, Sitzungsber. Akad. Berlin (phys.-math. Kl.), pp. 233–275, 1928 において取り扱われている．またそこで引用されているウェーグナー (Wegner)，ハーディ(Hardy)，ティッチマーシュ(Titchmarsh) の論文でも取り扱われている．

3.10.3　フレドホルムの定理を導くシュミットの方法

$\lambda = 1$ の場合をとり，核 $K(s,t)$ を

$$K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu(s)\beta_\nu(t) + k(s,t)$$

ただし $\iint k(s,t)^2\,ds\,dt < 1$ の形に書く[21]．従って，核 k のノイマン級数は $\lambda = 1$ のとき収束し（§3.6 参照）．それゆえ §3.6 によれば核 $k(s,t)$ に属する解核 $\kappa(s,t)$ が得られる．さて

$$f_1(s) = f(s) + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \alpha_\nu(s), \quad x_\nu = (\varphi, \beta_\nu)$$

とおいて，積分方程式 (1) を

$$f_1(s) = \varphi(s) - \int k(s,t)\varphi(t)\,dt$$

の形に書けば，解核 κ を用いて，次の等式が導かれる：

$$\varphi(s) = f(s) + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \alpha_\nu(s) + \int \kappa(s,t)\left[f(t) + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \alpha_\nu(t)\right]dt.$$

さらに

$$\begin{aligned} f_2(s) &= f(s) + \int \kappa(s,t) f(t)\,dt \\ &= \varphi(s) - \int \left[\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu(s)\beta_\nu(t) + \gamma_\nu(s)\beta_\nu(t)\right]\varphi(t)\,dt. \end{aligned}$$

ただし，

$$\gamma_\nu(s) = \int \kappa(s,\tau)\alpha_\nu(\tau)\,d\tau.$$

このようにして，与えられた積分方程式は退化核をもつ積分方程式に帰着する．

---

21 ［原註］Schmidt, E.: Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleicheungen, Zweite Abhandlung: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. Math. Ann. Bd. 64, pp. 161–174, 1907.

3.10.4　対称積分方程式を解くエンスコグの方法

正定値の核 $K(s,t)$ を考え，その1番目の固有値は1より大きいと，すなわちどんな φ に対しても不等式 $\int \varphi(s)^2\,ds - \iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt > 0$ が成り立つと仮定する．

さて $\lambda = 1$ と仮定した積分方程式 (1) を簡単に $f(s) = J(\varphi)$ と書こう．ただし $J(\varphi) = \varphi(s) - \int K(s,t)\varphi(t)\,dt$．次に，いわば「核 K に関して極形式的に完全な関数系」$v_1(s), v_2(s), \ldots$ なるものをつくる．これは $\int v_i J(v_k)\,ds = \delta_{ik}$ ($\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ik} = 0$ $(i \neq k)$) の関係を満たすものであるが，§2.1 で述べた直交化に類似の手順によって，与えられた完全な関数系 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ から構成できる[22]．$a_\nu = \int \varphi J(v_\nu)\,ds = \int v_\nu f\,ds$ とおけば直ちに $\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu v_\nu(s)$ が得られる．ただし右辺の級数に一様収束すると仮定する．また関数系 v_ν は「完全性の関係」$\int \varphi(s)J[\varphi(s)]\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ を満たす．これは区分的に連続な任意の関数 $\varphi(s)$ に対して成り立つ[23]．

3.10.5　固有関数を定めるケロッグの方法

任意の正規化された関数 $\varphi_0(s)$ から出発して，関数 $\varphi_\nu(s)$ と数 λ_ν を

$$\varphi_{\nu+1}(s) = \lambda_{\nu+1} \int K(s,t)\varphi_\nu(t)\,dt, \quad N\varphi_\nu = 1 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

という関係に従って決めてゆく．極限をとれば，核の固有値とそれに属する固有関数（それは反復核の固有関数でもある）が得られる[24]．

この考え方と漸近次元数の概念とを関連づけて，その線に沿って考察を進めてみることもできよう．

---

22 ［訳註］$\{v_i\}$ は $\int \varphi J(\psi)\,ds$ を内積とした場合の正規直交系である．

23 ［原註］Enskog, D.: Kinetische Theorie der Vorgänge in mäßig verdünnten Gasen. Dissertation, Uppsala, 1917.

24 ［原註］Kellogg, O.D.: On the existence and closure of sets of characteristic functions, Math. Ann., Bd. 86, pp. 14–17, 1922.

3.10.6　核の記号的関数とその固有値

積分方程式の核が定める演算子（作用素）の働きについては，第 1 章で行列に対して述べたのと類似な関係が成り立つ．いま，特に $u=0$ で 0 となる有理整関数 $f(u)=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu u^\nu$ を考えて，その中の u のベキ乗の項を対称核 $K(s,t)$ の対応する反復核でおきかえると

$$H(s,t)=f[K]=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu K^{(\nu)}(s,t)$$

という核が得られる．

このとき次の定理が成り立つ：

《定理》 H の固有関数 φ_i は K の固有関数と一致する．また，対応する H の特性数（固有値の逆数）η_i は，K の特性数 κ_i と $\eta_i=f(\kappa_i)$ の関係で結ばれている．□

実際，容易に示されるように，固有値 $\lambda_i=1/\kappa_i$ に属する $K(s,t)$ の固有関数 φ_i はまた，特性数 $\eta_i=f(\kappa_i)$ に属する $H(s,t)$ の固有関数でもある．H がこのほかに特性数と固有関数をもたないことは

$$\iint H(s,t)^2\,ds\,dt=\sum_{i=1}^{\infty} f(\kappa_i)^2$$

が成り立つことから容易にわかる．

3.10.7　固有関数をもたない非対称核の例

級数

$$K(s,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu s\sin(\nu+1)t}{\nu^2}$$

で与えられる核は領域を $0\leqq s,\,t\leqq 2\pi$ としたとき，固有関数をもたない．なぜなら，反復核が

$$K^{(n)}(s,t)=\pi^{n-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu s\sin(\nu+n)t}{\nu^2(\nu+1)^2\cdots(\nu+n-1)^2}$$

となるため，ノイマン級数が λ のすべての値に対して収束するからである．同じ結果は，K に属する関数 $D(\lambda)$ が定数になることを確かめてもわかる[25].

3.10.8　ヴォルテラの積分方程式

もし $s < t$ に対して $K(s,t) = 0$ ならば，積分方程式は

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^s K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

の形に書かれる．この型の積分方程式は特にヴォルテラ (Volterra) によって研究された．この方程式の解核は λ の超越整関数である．それゆえヴォルテラの積分方程式はどんな λ に対しても唯一の解をもち，従ってどんな λ に対しても固有関数をもつことはない[26].

3.10.9　アーベルの積分方程式

すでにアーベル (Abel)[27] は特殊ではあるが，多くの応用にとって重要なヴォルテラ型の積分方程式を提出している．それは次の問題を解くためのものであった：ある質点 m が重力の作用を受けて鉛直面内の滑らかな曲線上を運動する．高さ x の点から曲線に沿って最下点まで到達するのに要する時間 t を x の与えられた関数 f とするとき，曲線の方程式はどうなるか？

この問題は積分方程式

$$f(s) = \int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{2g(x-t)}}$$

に帰着する．ここで g は重力加速度である．$f(x)$ を $x = 0$ で 0 となる連続

---

25 ［原註］同じような核が Goursat: Cours d'analyse に出ている．(Literaturverzeichnis 参照.)

26 ［原註］Volterra, V.: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro–différentielles, Kap. II, Paris, 1913.
［訳註］原著では，このことを示せとの問いになっている．

27 ［原註］Abel: Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, Werke (Christiania 1881) I, pp. 11–27. ––Bôcher: Integral Equations, p. 8, Cambridge University Press, 1909.

微分可能な関数であると仮定すれば，このアーベルの積分方程式は

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}$$

を解にもつ．そうして曲線の方程式は

$$y = \int_0^x \sqrt{|\varphi^2(t) - 1|}\,dt$$

で与えられる．

もっと一般に，方程式

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(s)\,ds}{(s-x)^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

を考えるならば，連続微分可能な $f(x)$ に対して解は

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}} + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int_a^x \frac{f'(s)\,ds}{(s-x)^{1-\alpha}}$$

となる．

3.10.10 非対称核に属する随伴直交系

非対称核 $K(s,t)$ に対して 2 個の対称核

$$K'(s,t) = \int K(s,\sigma)K(t,\sigma)\,d\sigma, \quad K''(s,t) = \int K(\sigma,s)K(\sigma,t)\,d\sigma$$

をつくってみよう[28]．そうすると，次式が成立するような関数の対の列 $\varphi_\nu(s)$, $\psi_\nu(s)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ と，それに対応する数列 λ_ν が存在する：

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int K(s,t)\psi_\nu(t)\,dt, \quad \psi_\nu(s) = \lambda_\nu \int K(t,s)\varphi_\nu(t)\,dt,$$

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu^2 \int K'(s,t)\varphi_\nu(t)\,dt, \quad \psi_\nu(s) = \lambda_\nu^2 \int K''(s,t)\psi_\nu(t)\,dt.$$

$\int K(s,t)h(t)\,dt$ の形に表わされる関数はすべて，直交系 φ_ν によって絶対かつ一様に収束する級数に展開できる．同様に，$\int K(t,s)h(t)\,dt$ の形の関数は

[28] ［原註］Schmidt, E.: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener, Math. Ann. Bd. 63, pp. 433–476, 1907.

すべて直交系 ψ_ν によって級数に展開できる．

なお次の展開式が，もし右辺の級数が各変数について一様に収束する場合には成り立つ：

$$K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\psi_\nu(t)}{\lambda_\nu}.$$

核 K は数 λ_ν と 2 組の互いに独立な直交系によって一意に定まるのである．

3.10.11　第 1 種の積分方程式

第 1 種の積分方程式とは

$$f(s) = \int K(s,t)\varphi(t)\,dt \tag{84}$$

の形の方程式のことで，いろいろな所でその例に出会う．たとえば核の固有関数による関数の展開可能性は，第 1 種の積分方程式の可解性と結びついていた．ほかにフーリエ積分とメリン積分変換の例（§2.10.8）もある．

第 1 種の積分方程式の理論の難しさは，核 $K(s,t)$ が連続な場合には，すべての区分的連続な関数 $\varphi(s)$ からなる集合が，積分変換によってその部分集合の中に写されてしまうことである．実際，(84) の $f(s)$ は連続となり，さらにもし $K(s,t)$ が微分可能であれば，区分的連続な関数のみならず積分可能でしかない関数 $\varphi(s)$ までも微分可能な関数に写される．従って積分方程式 (84) は連続関数 $f(s)$ に対しては，連続な関数 φ によっては一般には解かれ得ない．そこで一般の関数族 $f(s)$ に対して方程式 (84) が解けることを期待できるのは，核 K の振舞いが正則なものからある程度ずれていてこそである．既出の，あるいはこれから登場する例をこの視点から考察して欲しい．その際，基本領域が無限遠まで伸びていることは，核が特異性をもつことに相当している．

対称核の場合には，$x_\nu = (f, \varphi_\nu)$ を核 $K(s,t)$ の固有関数系 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ による f の展開係数とすれば，解を全く形式的に $\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu \varphi_\nu(s)$ とおくことができる．この級数が一様収束すれば，——ν が増せば λ_ν は増すから，これは一般に $f(s)$ に対する制限条件を意味する——それは実際に (84) の解を表わす．

一般の場合については，ピカール (Picard) の定理[29]がある．これは任意の（非対称でもよい）第 1 種の積分方程式 $f(s) = \int K(s,t)\varphi(s)\,dt$ のルベーグの意味で 2 乗可積分の関数 $\varphi(s)$ による可解性に対する必要十分条件を与える定理である．すなわち，φ_i, ψ_i を §3.10.10 で述べた $K(s,t)$ に属する随伴関数の組とし，λ_i を対応する固有値とすれば，上の積分方程式が可解であるためには，級数

$$\sum \lambda_i^2 \left(\int f(s)\varphi_i(s)\,ds \right)^2$$

の収束することが必要かつ十分である．

3.10.12　無限多変数の方法

$\omega_1(s), \omega_2(s), \ldots$ を基本領域における任意の完全直交系とし，$x_i = (\varphi, \omega_i)$, $f_i = (f, \omega_i)$, $k_{pq} = \iint K(s,t)\omega_p(s)\omega_q(t)\,ds\,dt$ とおく．そうすると積分方程式 (1) は無限個の未知数 x_1, x_2, x_3, ... に対する無限個の線形方程式

$$f_i = x_i - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

を連立させたものとなる．ここでベッセルの不等式により $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$, $\sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij}^2$ はすべて収束する．この方程式系の解法の理論から積分方程式 (1) に対する諸定理を導くことができる．

3.10.13　固有関数の最小性

対称核の固有関数 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$，あるいは非対称核に属する 2 組の随伴直交系 $\varphi_i(s)$, $\psi_i(s)$，およびそれらに対応する固有値 λ_i は次の最小問題によって得られる：すなわち核 $K(s,t)$ を退化核

---

[29] ［原註］Picard, E.: Sur les théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique, Rend. Ciro. mat. Palermo, Bd. 29, pp. 49–97, 1910.

$$A_n(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_i(s)\,\Psi_i(t)}{\Lambda_i}$$

を用いて，$\iint (K - A_n)^2\, ds\, dt$ が可能な限り小さくなるように近似する，という問題である．その解が $\Phi_i = \varphi_i$, $\Psi_i = \psi_i$, $\Lambda_i = \lambda_i$ で与えられることを証明してみよ．

3.10.14　極積分方程式

核が $K(s,t) = A(s)S(s,t)$ の形をしており，$S(s,t)$ は対称，$A(s)$ は有限個の跳びを除けば連続という場合には，対称核の場合と同じような結果が導かれる．最も詳しく調べられているのは核 $S(s,t)$ が**定値**の，つまり，たとえば正の固有値しかもたない場合である．この場合はヒルベルト[30]とガルベ(Garbe)[31]によって研究され，**極積分方程式**あるいは**第 3 種の積分方程式**と呼ばれている．その解核は，対称核のときと同様，実かつ単純な極しかもたない．それに属する留数は「極固有関数」を与え，ヒルベルトが対称核に対して導いたのに類似した展開定理が成り立つ．特に，反復核 $K^{(2)}(s,t)$ が恒等的に 0 になるという場合を除けば，固有値は少なくとも 1 組は存在する．

なお，$S(s,t)$ をただ**正**であると仮定するだけで解核が実かつ単純な極しかもたない，という定理が成り立つ．

さらに，$S(s,t)$ は正であって $K^{(2)}(s,t)$ が恒等的に 0 となることはないならば，固有値が少なくとも 1 個は存在するという定理も成り立つ[32]．

---

30 ［原註］Hilbert, D.: Integralgleichungen, Kap. 15（ここでは極積分方程式が少し違った形で基礎づけられている）．

31 ［原註］Garbe, E.: Zur Theorie der Integralgleichung dritter Art, Math. Ann. Bd. 76, pp. 527–547, 1915.

32 ［原註］Marty, J.: Sur une équation intégrale – Développements suivant certaines solutions singulières – Existence de solutions singulières pour certaines équations de Fredholm, C. R. Acad. Sc. Psris, Bd. 150, pp. 515–518, 1910, Ib. pp. 603–606, Ib. pp. 1031–1033.

3.10.15　対称化できる核

解核が実で単純な極しかもたない核を，次のように極めて簡潔かつ直接的に特徴づけることができる[33]：核 $K(s,t)$ が上の性質をもつためには，核

$$\int S(s,\tau)K(\tau,t)\,d\tau, \qquad \int K(s,\tau)S(\tau,t)\,d\tau$$

が対称となるような核 $S(s,t)$ の存在することが必要である．そのような核 $K(s,t)$ を**対称化できる核**という．

逆に，もしある正定値の対称核 $S(s,t)$ に対して上記の積分の少なくとも一方が対称核となるならば，$K(s,t)$ の解核のすべての極は実で単純である．

3.10.16　関数方程式による解核の決定

核 $K(s,t)$ の解核が方程式 (63) によって一意に決定されることを証明せよ．

3.10.17　定値核の連続性

基本領域 $0 \leqq s,t \leqq 1$ で区分的に連続な定値の対称核 $K(s,t)$ が，$s=t$ を満たすすべての点で連続であって，しかもその固有関数は連続であるとすると，$K(s,t)$ は実は $0 \leqq s,t \leqq 1$ のいたる所で連続である．このことを示せ．

3.10.18　ハンメルシュタインの定理

基本領域 $0 \leqq s,t \leqq 1$ で連続な核 $K(s,t)$ が全領域で一様有界な導関数をもっている場合には，本来ならば反復核 $K^{(2)}(s,t)$ に対してはじめて成り立つ双線形形式の公式が，$K(s,t)$ 自身に対してすでに成り立つ．なお $K(s,t)$ に対する上の有界微分可能性の仮定は，本質的にもっと一般性の高い仮定で

[33] ［原註］Marty, J.: Valeurs singulières d'une équation de Fredholm, C. R. Acad. Sci. Paris, Bd. 150, pp. 1499–1502, 1910.

おきかえられる[34].

[34] [原註] Hammerstein, A.: Über die Entwicklung des Kernes linearer Integralgleichungen und Eigenfunktionen, Sitzungsber Akad. Berlin (phys.–math. Kl.), pp. 181–184, 1923.

第4章　変分法の基本

前章までに扱った理論を応用したい数理物理学のほとんどすべての問題は，多かれ少なかれ変分法と密接に結びついている．本章では解析学の中心分野であるこの変分法の基本事項について述べるが，その目指すところは数理物理の微分方程式とその解法を自然な流れで導くことである．なおここで提示される理論は下巻第8章に補完され深化される．

4.1　変分法の問題の立て方

4.1.1　関数の最大・最小

変分法の出発点は通常の最大・最小問題の初等理論の一般化である．この一般化の本質を理解しやすいように，まずは，周知の初等理論を少々復習しておこう．そこで問題とされるのは，与えられた閉領域 G 内を動く変数 x, y, ... をもつ与えられた連続関数 $f(x, y, \ldots)$ に対して，それが最大・最小となる点あるいは極値となる点 x_0, y_0, ... を見つけることである．なお，極値とは，x_0, y_0, ... に十分近い G 内のすべての点における最大（極大）または最小（極小）である．

この問題が常に解をもつことは，第1章ですでに用いた，関数の連続性に直結している定理，すなわち，次のワイエルシュトラスの定理が保証するところである：

《定理》 閉領域内で連続な任意の関数は，領域の内部または境界上で最大およ

び最小となる. □

関数 $f(x, y, \ldots)$ が G で微分可能であり, G の内部で極値をとるならば, その点において $f(x, y, \ldots)$ の微係数はどの変数についても 0 になる. いいかえれば, そこで微分 df が 0 になる. この必要条件は決して十分ではない. それは変曲点や鞍点が存在することから明らかである. (たとえば $f(x) = x^3$ における $x_0 = 0$ や $f(x, y) = xy$ における $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ がそれである.) 一般に, 関数の微係数がすべて 0 になる点, すなわち $df = 0$ である点を**停留点**という.

変数が独立でなく, 付帯条件 $g_1(x, y, \ldots) = 0$, $g_2(x, y, \ldots) = 0$, ..., $g_h(x, y, \ldots) = 0$ が課せられているときは, 極値あるいは停留値となるための必要条件を導くのに**ラグランジュ**(Lagrange) **の未定乗数法**が役に立つ. その手順は次の通りである：$f(x, y, \ldots)$ が極大または極小となる変域内部の点 $(x_0, y_0, \ldots)$ を求めるには, $h+1$ 個の新しい変数, いわゆる「未定乗数」λ_0, λ_1, ..., λ_h を導入し, 関数 $F = \lambda_0 f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_h g_h$ をつくり, 方程式

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \ \ldots, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0, \ \ldots, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_h} = g_h = 0 \end{cases}
$$

から x_0, y_0, ... と λ_0, λ_1, ..., λ_h の比（連比）を求めるのである. この方程式の数は未知数の数と一致している. この方程式が, 付帯条件のもとで $f(x, y, \ldots)$ が停留値あるいは極値をとる条件を与えるのである.

F は λ_i に関して同次だから, $\lambda_0 = 0$ でない限り $\lambda_0 = 1$ と仮定してもよい. ラグランジュの方法は, 関数 $f(x, y, \ldots)$ から与えられた付帯条件を用いて h 個の変数を消去するという, 面倒で非対称な作業を回避する, 格別に手際のよい方法にほかならない.

次にいくつかの典型的な例を挙げよう. これらは初等的な性格にかかわらず, 方向づけの手段として有益である.

(a) **底辺と周長が与えられた三角形のうちで, 二等辺三角形が最大の面積をもつ. また, 底辺と面積とが与えられた三角形のうちで, 二等辺三角形が最小の周をもつ.**

上の主張は，与えられた底辺の両端を焦点とする楕円を考えれば，全く計算などしないでも，その理由が明らかとなる．しかもこの極めて簡単な例において，すでに，特有の**相反性**が認められるのである．この相反性については，また後で触れるであろう (§4.11.2, p. 269).

(b) **光の屈折と反射**．いわゆるフェルマー (Fermat) の**最短経路の原理**とは，次の主張である：2 点間を通る光の路は，与えられた条件を満たす，考え得る他の（「仮想の」）路と比べて所要時間が最小のものである．この原理から，均質な媒体内の光の伝播は直線的であることが直ちに得られる．光が与えられた曲線（鏡）とぶつかり，しかもそれを横切らなければ，微係数に対する条件からすぐに導かれるように，光路は 2 つの線分からなり，曲線と出会う点で，その接線と等角をなす（**反射法則**）．それに対照的に，与えられた曲線が 2 つの領域の境になっており，それぞれの領域における光線が c_1, c_2 と異なっているとする．そのとき，光が一方の領域から他方の領域に進入するとすれば，光路はやはり 2 つの線分からなり，いわゆる**屈折法則** $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = c_1 : c_2$ を満たすことになる．ここに α_1 および α_2 は光線と曲線との交点において，曲線の法線が両線分となす角である．

(c) **多角形に関するシュタイナー (Steiner) の問題**．鋭角三角形をなす 3 頂点 A_1, A_2, A_3 に対して，第 4 の点 P を，各頂点への距離の和 $PA_1+PA_2+PA_3$ が最小となるようにとれ．A_3 を中心として半径 PA_3 の円を描けば，P はこの円周上において $PA_1 + PA_2$ が最小になるような点である．すなわち (b) によれば，点 P は，線分 PA_1, PA_2 が半径 PA_3 と等角をなさねばならない．番号 1, 2, 3 を入れ換えても同様なことが成り立つべきである．よって，角 A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_1 は互いに等しい．よってその共通値が $\frac{2\pi}{3}$ でなければならない．これで問題の解が得られた．

(d) **多角形に対する等周問題**．辺数 $2n$，周長 $2l$ が与えられた単純な（すなわち，自身と交わらない）多角形の中で，最大面積をもつものを求めよ．求める多角形 $\Pi(A_1, A_2, \ldots, A_{2n})$ は正 $2n$ 角形である．

これを証明するために，まず Π が凸であることを示す．実際，Π が凸でなければ，隣り合わない 2 つの頂点，たとえば A_1, A_3 で，両者を結ぶ線分が多角形の外にあるようなものが存在する．このとき折線 $A_1A_2A_3$ をこの線

分に関して対称移動し，折線 $A_1A_2'A_3$ をつくる．それを残りの折線と合わせれば，与えられた周長をもち，面積がより大きな多角形が得られる．すなわち Π は凸である．これから先は，凸多角形だけを考えればよい．

第 2 に，この多角形の辺はすべて等しいことを示す．もし隣り合う 2 辺 A_1A_2, A_2A_3 が等しくなければ，(a) によって頂点 A_2 を新しい頂点 A_2' でおきかえて，$A_1A_2' + A_2'A_3 = A_1A_2 + A_2A_3$ であるが，三角形 $A_1A_2'A_3$ の面積が三角形 $A_1A_2A_3$ のそれより大きくなるようにできる．従って，Π の面積が最大であるという仮定に反して，Π より面積が大きな新しい多角形ができてしまう．

最後に Π は円に内接することを示す．そのために相対する頂点 A_1, A_{n+1} を結ぶ対角線 d で Π を 2 つの等周な多角形 Π_1, Π_2 に分ける．この 2 つは等積である．なぜならば，もし Π_1 が Π_2 より大きければ，対角線 d に対する Π_1 の鏡像 Π_1' を Π_1 につけ足した多角形 $\Pi^* = \Pi_1 + \Pi_1'$ は，周長 $2l$ で面積は Π より大きいからである．さて，任意の頂点 A_h に対し角 $A_1A_hA_{n+1}$ は直角であることを示そう．頂点 A_h に対して角 $A_1A_hA_{n+1}$ が直角でなければ，Π を三角形 $A_1A_hA_{n+1}$ と辺 A_1A_h および辺 A_hA_{n+1} に接している 2 つの多角形 H_1, H_2 の 3 つに分割する．そこで，次のような直角三角形 $A_1'A_hA_{n+1}'$ を考えるのである．すなわち，辺 $A_1'A_h$ および A_hA_{n+1}' はそれぞれ A_1A_h, A_hA_{n+1} に等しい直角三角形ある．その辺 $A_1'A_h$, A_hA_{n+1}' に多角形 H_1, H_2 をつけ足す．

こうして得られた多角形 Π_1^* を $A_1'A_{n+1}'$ に対して折り返したものを，Π_1^* につけ加えた閉多角形を Π^* とする．この新多角形 Π^* の周長は $2l$ であるが面積は Π より大きい．直角三角形 $A_1'A_hA_{n+1}'$ は直角でない三角形 $A_1A_hA_{n+1}$ よりも面積が大きいからである．よって，Π が円に内接することが示された．以上により，Π は正多角形である．すなわち正多角形の最大性が証明された[1]．上の問題と相反的な問題，すなわち与えられた面積をもつ多角形のうちで周長が最小のものを求める問題の解も，まさに同様である．

---

[1] ［原註］もう一度さらにはっきりと示しておくが，最大値の存在はワイエルシュトラスの定理によってあらかじめ確定されている．すなわち，多角形の 1 つの頂点を座標平面の原点にとれば，他の頂点の座標は周長の制限によって限られ，ある有界閉領域にとどまる．そして面積がそれらの座標に連続に依存するからである．

上で説明した，シュタイナーの古典的な考えに基づく取り扱い（証明）は，具体的な場合には，直観的な幾何学的方法が一般的な解析的方法よりも，目的に対して，より直截的かつ，より説得的であり得ることの例である．

(e) **その他の例，最小の最大**．単純な極大あるいは極小を扱うだけではない，別種の例に対しては，すでにいくつか出会っている．たとえば二次形式に対し，最小値の最大としての二次形式の固有値の定義，あるいは**チェビシェフの多項式**[2]などが具体例として挙げられる（p. 94 参照）．

4.1.2 汎関数

変分法も，同じように，極値問題あるいは停留値に関わる問いを出発点とするものである．しかしながら，根本的な違いは，もはや有限個の変数をもつ関数の極値を取り扱うのではなく，いわゆる**汎関数**[3]の極値を問題の対象とすることである．汎関数とは，与えられた範囲において任意の値をとり得る1つあるいは複数個の独立変数に依存する量ではなく，独立変数の代役ともいうべき，1つあるいは複数個の，与えられた制限のもとでは任意な関数に依存する量（すなわち関数の関数）である．その最も簡単な例は，曲線 $y = f(x)$ の $x = x_0$, $x = x_1$ の間の長さ L ──その値は積分 $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ で与えられる──である．数 L は確かに，**引数関数**[4] $y(x)$ の（区間内での）全挙動に依存する．ここで，引数関数 $y(x)$ は区分的に連続な導関数をもつ任意の連続関数であるとする．こうした汎関数は，解析学とその応用のいたる所に登場し，解析学の重要な問題の多くは，程度の差こそあれ，汎関数に関連している．

もう1つの例は，xy-平面上の領域 G の上にある曲面 $z = z(x, y)$ の面積である．これは積分

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy$$

[2] ［訳註］この多項式の特徴づけには，最大値ノルムの最小化が用いられる．

[3] ［原註］フランス語の文献では “fonction de ligne” あるいは “fonctionnelle”．
［訳註］変分法における汎関数の原語（独）は甚だ直截的な Funktionenfunktionen（関数の関数）である．

[4] ［訳註］原語は Argumentfunktion．直訳すれば引数 (argument) 役の関数である．

によって与えられ，確かに関数 $z(x,y)$ の汎関数である．

実は，汎関数のさらなる例に，すでに前章で出会っている．実際，$K(x,y)$ が与えられているとき，関数値

$$g(x) = \int K(x,y)h(y)\,dy$$

は $h(x)$ を引数関数とする汎関数であり，積分形式

$$\iint K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy$$

は $\varphi(x)$ を引数関数とする汎関数である．この章では汎関数のうちで，上述の曲線の弧長のように，引数関数，その導関数，および独立変数で表わされる式の積分として与えられるものに話を限る．

有限個の変数の関数の場合には，その定義域が指定されねばならないのと同様に，汎関数の場合には，その引数関数として**許容される関数（引数関数）**の範囲が定義されねばならない．たとえば，関数が連続であるとか，1次導関数が区分的に連続であるという条件によってである．

汎関数を有限個の変数の関数とみることはできないにしても，**無限個の変数の関数**とみることはできる．たとえば，引数関数をベキ級数あるいはフーリエ級数に展開し，その展開係数を無限個の変数とみなすのである．当然ながらこの無限変数の変域には，引数関数が満たすべき条件に由来する制約条件が課せられる．

4.1.3　典型的な変分法の問題

変分法において問題とするのは，汎関数の極大または極小，さらに一般には，停留値[5]を調べること，かつ，与えられた関数の範囲に属する引数関数の中から，その極値あるいは停留値を実現させるものを求めることである．微分法における普通の最小問題あるいは最大問題において，いきなり絶対的な最小や最大を求めようとせずに，まずは，ある近傍における局所的な最大・最小，すなわち極値を調べるのと同様に，変分法においても，引数関数のある近傍に

[5]［原註］汎関数の停留値とは何を意味するかは，あとで精密に決める（§4.3.1）．

おける相対的な極値を問題とし，その極値を実現する引数関数を求めるべきである．そのためには，我われは，着目する**関数 $\boldsymbol{f(x,y,\ldots)}$ の近傍**という概念を定義しなければならない．h を正の数とするとき，関数 $f_1(x,y,\ldots)$ が関数 f の近傍内にある，より正確には関数 $f(x,y,\ldots)$ の h-近傍（近傍 (h)）内にあるとは，考えている独立変数の領域内で $|f-f_1|<h$ が成り立つことをいう[6]．

さてここで，**変分法の基本問題**を定式化しよう：それは，与えられた汎関数の，引数関数の範囲に属する関数の中からこの汎関数を極値にするものを求めること，すなわち，その関数の十分小さな任意の近傍 (h) に属する他の引数関数と比較して，汎関数がその関数において極値となるようにすることである．引数関数は全く自由に選び得ることもあれば，あるいは，指定された関数方程式による条件によって拘束されることもある．極値をとらせるべき汎関数が，変化するパラメータ $x, y, \ldots$ をさらに含むとき，従って汎関数が，引数関数を固定しても定数ではなく，それ自身これらのパラメータの関数であるときには，パラメータの値も汎関数を極値にするという要請に応じて定められねばならない．以下，変分問題の立て方を一連の簡単な例によって説明しよう．

(a) **測地線**．曲面上の 2 点を結ぶこの曲面内の最短曲線を決定せよという問題である．曲面が直交座標 x, y, z のパラメータ表示 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ によって与えられており，普通の記号 $e=x_u^2+y_u^2+z_u^2$, $f=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$, $g=x_v^2+y_v^2+z_v^2$ を用いるとすれば，方程式 $v=v(u)$ によって定義された曲面上の曲線の，$u=u_0$, $u=u_1$ の間の長さは積分 $L=\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{e+2fv'+gv'^2}\,du$ で与えられる．従って $\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{e+2fv'+gv'^2}\,du$ の極値を決定することが課題である．

(b) **光の通路，最速降下線**．すでに定式化して述べた (p. 177) フェルマーの原理によれば，光速度が $\varphi(x,y)$ で与えられる非均質な 2 次元的媒体の中

---

[6] ［原註］研究の状況に応じて，近傍の概念に段階をつけて精密化する方が目的に通ずることがある．そうするときには，関数 $f_1(x,y,\ldots)$ が $f(x,y,\ldots)$ の 1 次の近傍 (h) 内にあるとは，$|f-f_1|<h$ の他にさらに $|f_x-f_{1x}|<h$, $|f_y-f_{1y}|<h$, $\ldots$ が成り立つことであるとする．さらに一般には，このような不等式が f_1 自身に対する他，f_1 の n 次までのすべての導関数に対して成り立つとするとき，$f(x,y,\ldots)$ の n 次の近傍 (h) であるという．

での光の経路は，$y = y(x)$ を引数関数とする変分問題

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\varphi(x,y)}\,dx = \text{最小}$$

によって定められる．すぐ前の問題の場合と同様に，ここで比較の対象として許容される曲線は，与えられた両端点を結び，向きが連続的に変わるような曲線である．——この光の経路の問題と全く同様に，最速降下線の問題が設定される．それによってヤコブ・ベルヌーイ (Jacob Bernoulli) は，1696年に変分法の発展に対する最初の刺激を与えたのであった．具体的には2点 $A(x_0, 0)$, $B(x_1, y_1)$ を曲線で結び，この曲線上を y 軸方向の重力を受けつつ，摩擦なく滑る質点の運動を考えるとき，最も速く A から B に到達させるような曲線を選べ——というのが問題である[7]．ただし，質点の初速は0とする．y だけ降下したときの質点の速さが $\sqrt{2gy}$ であることはよく知られている．ただし g は重力の加速度である．これより，最小にするべき降下時間は積分

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx \tag{2}$$

によって与えられる．比較関数，すなわち比較のために許容される関数 $y(x)$ は，いたる所正であり，1階および2階の導関数は連続，そうして $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ を満たすのである．

(c) **極小回転曲面**．曲線 $y = y(x) \geqq 0$ を x 軸の周りに回転するとしよう．それによって生ずる回転曲面の，平面 $x = x_0$, $x = x_1$ によって限られる部分は面積 $F = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ をもつ．よって最小の回転曲面を与える曲線 $y = y(x)$ は，変分問題

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \text{最小}$$

によって定められる．

(d) **等周問題**．本来の幾何学的な形では，この問題は次のように述べられる：与えられた周長をもつ閉曲線のうちで，囲む面積が最大となるものを求

---

7 ［訳註］y 軸を鉛直方向下向きにとっている．

めよ．

求める曲線は凸形であり，x 軸によって等積かつ等周な 2 つの部分に分けられていると考えてよい（§4.1.1 (d) 参照）．そうすると，問題は次の形に帰着される：正数 ξ と関数 $y = y(x)$ を選ぶことにより，積分

$$\int_0^\xi y(x)\,dx$$

を最大にせよ．ただし

$$\int_0^\xi \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$$

は与えられた値であり，さらに $y(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq \xi$ で連続，その 1 次導関数は区分的に連続，かつ $y(0) = y(\xi) = 0$ であるとする．

上の問題で上限 ξ が固定されている場合にも，全く類似な問題の定式化ができる．

特殊等周問題とも呼ばれるこれらの問題は，次のようにして普通の変分問題に帰着される．すなわち，独立変数として孤長 $s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$ を導入するのである．s の変域は区間 $0 \leqq s \leqq l$ となる．$ds^2 = dx^2 + dy^2$ を用いれば，問題は次のように言い換えられる：$y(s)$ は区分的に連続な導関数をもつ s の連続関数であるとして

$$\int_0^l y\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds$$

を最大にせよ．$y(s)$ が決定されたなら

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds \tag{3}$$

によって，求める曲線のパラメータ表示が得られる（§2.10.1 の等周問題のフルヴィッツの解法を参照）．

一般に，2 つの積分について，一方の積分の値が与えられた値をもつという条件のもとで，他方の積分を極値にする問題を**等周問題**という．その一例は**懸垂線の問題**である．そこでは，一様な重さの，定まった長さの細い紐の両端を固定して，y の負の方向に働く重力のもとに置いたときの紐の位置を求めるのである．

平衡の位置は，重心ができるだけ下方に来るようにとの要請で決定されるので，次の変分問題に行き着く：積分

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

を

$$l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

が与えられた値をとり，かつ境界値 $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$ が指定されているという条件のもとに，最小にせよ．

さらに 1 つの問題は，付帯条件

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx=1$$

のもとで

$$\int_{x_0}^{x_1}(y'')^2\,dx=\text{最小}$$

とするものである．ここに関数 $y(x)$ は区間の両端で 0 になり，かつ区間全体において 2 次までの導関数が連続であるとする．

さらに次の問題を挙げよう（p. 190 参照）：2 次元の領域 G 内において，自身および 1 次の導関数が連続な x, y の関数 u を，付帯条件 $\iint_G u^2\,dx\,dy=1$ のもとで

$$\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy+\int_\Gamma \sigma u^2\,ds \tag{4}$$

が最小になるように決定せよ（Γ は領域 G の境界を表わし，σ は Γ の孤長 s の定まった関数）．前章において，対称核の固有関数を決定した最小問題もまたこうした等周問題の 1 つである．

上で紹介したすべての問題において，当然ながら，許容される比較関数の範囲は，連続性・可微分性に関して，対象とする汎関数が意味をもつように設定されねばならない．

4.1.4　変分法に特有な困難

通常の最大・最小問題においては，ワイエルシュトラスの基本定理が，す

べての場合における解の存在を総括的に保証するのとは異なって，変分法では，問題が意味をもつように定式化されていても，場合によってはその解が存在するとは限らないという特有の困難がある．それというのも，許容される比較関数の範囲を，集積点の原理が成り立つような閉じた集合にとることが一般には不可能であるせいである．この事情の簡単な例として，次の幾何学的問題がある：

x 軸上の 2 つの点を，その（接続の）向きの変化が連続的であるような曲線のうちの最短なもので結びたい．ただし，これらの曲線は端点では x 軸に直交するものとする．この問題の解は存在しない．許容される曲線の長さは，2 点を線分で結んだときの長さよりも大きいが，それに近づき得る．ここでは，許容される曲線の長さの下限は存在するが，引数関数によって到達される最小値は存在しないのである．

解のない変分問題の他の例として，次のものも挙げよう．積分

(5)
$$\int_{-1}^{1} x^4 y'^2 \, dx$$

を，連続な関数 $y(x)$ で区分的に連続な導関数をもち，条件 $y(-1) = -1$, $y(1) = 1$ を満たすものの中で最小にせよ．この問題では適当な関数によって（たとえば，$x < -\varepsilon$ のとき $y = -1$, $x > \varepsilon$ のとき $y = 1$, $|x| \leqq \varepsilon$ のとき $y = \frac{x}{\varepsilon}$）積分は任意に小さくできる．しかし，どんな引数関数に対しても積分が 0 になることはない．

これにより，**変分法においては，与えられた極値問題の解の存在に対して，常に特別の証明が必要である**ことがわかる．変分法と関係する多くの問題において，このことは，追々に学ぶように本質的な困難をもたらすのである．

この章では極値になるための**必要条件**の導出だけを主に扱い，これらの条件を満たせば極値として実際に実現するかどうかの問題には，不問のままにしておこう．

これらの必要条件を微分方程式の形で導く前に，次節において，変分問題の直接解法の基礎事項についての解説を行なう．

4.2 直接解法への初歩

変分問題の直接[8]かつ完全な解を求めるのに最もよく用いられる方法は，まずもとの問題を適当に近似する n 個のパラメータを含む形の通常の極値問題を解き，そのあとで $n \to \infty$ の極限をとるというやり方である．

4.2.1 等周問題

例として§4.1.3 (d) で述べた等周問題，すなわち周長 $2l$ をもつ閉曲線 K のうちで，囲む面積が最大なものを求めるという問題を考えよう．この曲線は区分的に滑らかである．すなわち有限個の頂点を除いては連続的に変化する接線をもっているとする．

曲線 K が解であると仮定すれば，それは円であると結論できる．なぜなら，第一に，§4.1.1 (d) で述べたのと同じ理由で，K は凸形であって，しかも K の周を等長の部分に 2 分するどの弦 AB も，K が囲む面積をやはり 2 等分する．第二に，曲線 K 上のどの点 P をとっても角 APB の大きさは直角に等しい．もしそうでないとすると§4.1.1 (d) の構成法によって直ちに，周長が同じで前よりも面積の大きい曲線 K' が得られるからである．

しかしこの考察は§4.1.4 で述べたように，そもそもこの問題が解をもっているという（実は）証明を必要とする事実を使って解を出している．それゆえ，必要な解の存在証明をも同時に与えるような，別の解法を選ぶことにしよう．

まず，許容曲線が囲む面積の数値全体の集合を考える．この数値は決して $l^2\pi$ を超えることはない（曲線は半径 l の円の内部にある）から，解析学の初等的な基礎定理によって，この数値全体の集合は上限 M をもつ．すなわち M より大きな数はこの集合に属さないが，正数 ε をどれほど小さくとっても M の ε 近傍にはこの集合に属する数が存在する．いいかえれば，$K_1, K_2, K_3, \ldots$ という許容曲線の**極大列**が存在して，曲線 K_n が囲む面積 F_n は n を増せば M に収束する．

---

[8] ［原註］変分計算の直接の方法については下巻第 8 章で詳しく述べる．

さてどの曲線 K_n も，十分多くの辺数をもつ多角形 Π_n によって，面積と周長のどちらについても，いくらでも精密に近似することができる．さらに，この近似の性質を保ったまま，各多角形を周長が正確に $2l$ に等しいように自分自身を相似変形することができる．こうして，極大列 $K_1, K_2, \ldots$ は多角形 Π'_n からなる極大列におきかえられる．これらの多角形の辺数は偶数であるとしてよい．なぜなら，$(2m-1)$ 角形は，$2m$ 角形の隣接する 2 辺が同一直線になったものとみなすことができるからである．

さて §4.1.1 (d) により，周長 $2l$ の $2m$ 角形の中で正 $2m$ 角形が最大の面積をもつことを知った．それゆえ，多角形 Π'_n を対応する正多角形でおきかえるならば，そこでまさに我われの問題に対する極大列が得られたことになる．この正多角形列は，辺の数が増えるとともに周長 $2l$ の円に収束し，多角形の面積 M に収束する．その円は面積 M をもつ．これで変分問題が完全に解けた．

4.2.2　リッツの方法・極小列

先の例の考察は，次のような一般的な考え方に基づいている．いま「$D[\varphi]=$ 最小」の形で与えられる変分問題を考えるとする．ここに $D[\varphi]$ は関数 φ およびその k 次までの導関数を含む与えられた式の積分であり，その積分領域および引数関数 φ の範囲はあらかじめ指定されているとする．積分が単積分であるか多重積分であるか，また積分の中に 1 次より高い導関数が含まれているか，は問うところではない．積分 $D[\varphi]$ が引数関数 φ に対してとる値域が下限 d をもつと仮定する（d がある関数 $\varphi=u$ に対して最小値として実現するかどうかはこの段階では不確定である）．いいかえれば，引数関数の列 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ で $\lim_{n\to\infty} D[\varphi]=d$ となるものが存在する．そうして，任意の引数関数 φ に対して $D[\varphi] \geqq d$ が成り立つ．このような関数列を変分問題の**極小列**と呼ぶ．**変分問題の直接解法とは，常に極小列をつくり，それから極限をとることによって解を求めようとする方法である．**

この意味で W. リッツ (W. Ritz) が数値解を得るために用いて大きな成果

をあげた方法[9]は，次の手順からなる．まず，考える積分領域で定義されている完全な関数系 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ で次の性質をもつものから出発する：すなわち，有限個の線形結合 $\varphi_n = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$ は，すべて許容される比較関数であり，かつ，任意の許容される比較関数 φ に対して，ω_k たちの適当な線形結合 φ_n をとれば，$D[\varphi]$ が $D[\varphi_n]$ によっていくらでも精密に近似できるという性質をもっているからである[10]．このとき φ_n が $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ の線形結合 $c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots + c_n\omega_n$ であるような極小列 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ が存在する．当然ながら，任意の n に対して関数 φ_n を，すなわちパラメータ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を，$D[\varphi_n] = d_n$ が最小になるという要求により決めれば，極小列が得られる．この要求は n 個のパラメータ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ を変数とする関数 $D[\varphi_n]$ に対する通常の最小問題にほかならない．従って，この要求はワイエルシュトラスの定理によって，$D[\varphi]$ がパラメータ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ の連続関数である限り満たされ得るのである（最適な $c_1, c_2, \ldots, c_n$ が存在するのである）．一般的には，c_i を定めるものとして n 個の方程式 $\frac{\partial D[\varphi_n]}{\partial c_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が導かれる．このようにして得られた極小列は，求める解に収束するものと期待される．残念ながら §4.2.4 でみるように，事実はそれほど簡単でなく，一般的には次のようにいえるだけである．すなわち得られた値 $D[\varphi_n] = d_n$ は求める下限あるいは最小値に収束するが，極小列それ自身が解に収束するかどうかは，各個に研究すべき問題として残る．この問題へは，以後様々の機会に戻ってくることにしよう．

この方法は，収束することが証明できないときでも，状況によって数値計算に対して有用性を発揮する．個々の場合に，この方法がどれだけ成果をあげるかは，多かれ少なかれ**座標関数** ω_i の上手な選び方に依存し，問題に応じての計算者の腕の見せ所である．この方法の初歩的な解説のために，§4.2.3 の例を考察しよう．

9　［原註］Ritz W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, J. reine angew. Math., Bd. 135, pp. 1–61, 1909. —— Gesammelte Werke, pp. 192–250, Paris 1911.

10　［原註］このような関数系の存在については下巻第 8 章でさらに詳しく論じる．

4.2.3 直接解法——差分法——無限個の変数

多くの場合において，手法を変え，引数関数の範囲を拡げて極小列を得ることができる．たとえば連続的に微分可能な連続関数の代わりに，区分的に連続な導関数をもつ連続関数を引数関数としてとるときである．それに関し，ここでは最も簡単な

$$D[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

の形の積分を最小にする問題に限って考察しよう．$y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x), \ldots$ を極小列としたとき，$F(x, y, y')$ に関するいつもの連続性の仮定のもとに，曲線 $y = \varphi_n(x)$ を折線 $y = p_n(x)$ で精密に近似することが可能である，すなわち $D[\varphi_n]$ が $D[p_n]$ によっていくらでも近いように近似することができる．こうして区分的に 1 次関数である関数からなる極小列が作られる．この場合，これらの関数の微分商と差分商は分点を除く各部分区間で一致する．たとえば，積分区間を m 個の分点によって等しい長さ Δx の部分に分け，かつ各区間で 1 次関数になる関数に限って考察するとき，変分問題は，分点における関数値 y_1, y_2, ..., y_{m+1} に関する普通の最小問題

$$\sum_{i=1}^{m} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)\Delta x = \text{最小}$$

に帰される．このようにして $m = 1, 2, 3, \ldots$ に対して得られる関数はやはり極小列である[11]．

この方法がリッツの方法に含まれることを納得するためには，区分的に 1 次関数であるような座標関数を導入すればよい．

この方法による極小列が最小問題の解に収束するかどうか，いかなる条件のもとでそうなるかは下巻で調べよう．

被積分関数が高次の導関数，たとえば 2 次の導関数を含む場合にも，全く同様に進むことができる．このとき，近似問題においては，2 次の微分商を

---

11 ［原註］ここに述べた方法はオイラー (Euler) が論文 “Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietare gaudentes” (Lausanne 1774) において「オイラーの微分方程式」を導いた方法と本質的に同じである．

2 次の差分商 $\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i}{(\Delta x)^2}$ でおきかえるのである．

変分問題はまた**無限個の変数をもつ関数の理論**の観点から考察することができる．第 2 章（p. 103 以下）で扱った等周問題のフルヴィッツの解法はその例である．そこではフーリエ係数が問題の変数として登場し，解は解析的な式で明示された．リッツの方法はこのような見方も含んでいるといえる．すなわち，求める関数が，たとえば無限級数 $c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots$ に展開できるとみなしてよいとき，リッツの方法は，無限個の係数 $c_1, c_2, c_3, \ldots$ を順次決定する方法とみなせるのである．当然ながら，その上で必要な収束の検討を補わねばならない．

上述の一般的な議論をいくつかの例によって明らかにしよう．

(a)（p. 184 参照）長方形 $R: 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b$ 上の積分

$$D[\varphi] = \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy \tag{6}$$

を最小にせよ．ただし比較に用いる引数関数は R 内で連続かつ区分的に滑らかであり[12]，境界で 0 となる．それはさらに付帯条件

$$H[\varphi] = \iint_R \varphi^2\, dx\, dy = 1 \tag{7}$$

を満たすものとする．

第 2 章の結果により，関数 φ はフーリエ級数

$$\varphi = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m\frac{\pi x}{a} \sin n\frac{\pi y}{b}$$

に展開されるとしてよい．そうすると，無限個のパラメータ c_{mn} を，最小性の条件から決定することが課題となる．関数 φ_x および φ_y もまた区分的に連続であるから，その展開係数 $\frac{\pi}{a}mc_{mn}$, $\frac{\pi}{b}nc_{mn}$ に対して，三角関数の完全性関係を適用することができる．すなわち，上の 2 つの積分に対して，無限個のパラメータ c_{mn} を含む表式

$$D = \pi^2\frac{ab}{4}\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), \quad H = \frac{ab}{4}\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \tag{8}$$

---

12 ［原註］第 2 章のはじめの定義参照．

が得られる．条件 $H=1$ から，解が次のようになることがわかる：c_{11} 以外の係数については $c_{mn}=0$ であり，c_{11} は $\sqrt{\frac{4}{ab}}$ に等しい．よって変分問題は関数

$$u=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

によって解かれ，D の最小値は

$$d=\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

となる．この事実は，区分的に滑らかな，長方形の境界で 0 となる任意の関数 φ に対して不等式

$$D[\varphi]\geqq\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)H[\varphi] \tag{9}$$

が成り立つことを意味している．なぜならこの不等式は，正規化された関数 $\psi=\frac{\varphi}{\sqrt{H[\varphi]}}$ に対する条件 $D[\psi]\geqq d$ と同値だからである．

(b) **円に対するディリクレの問題**[13]．xy-平面の円（板）$K: x^2+y^2\leqq 1$ 上での積分

$$D[\varphi]=\iint_K(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy$$

を最小にする問題を，K 内で滑らかで，境界で与えられた境界値をとる関数を比較関数として許容して考察する．円内に極座標 r,θ を導入しよう．すると積分は

$$D[\varphi]=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\varphi_r^2+\frac{1}{r^2}\varphi_\theta^2\right)r\,dr\,d\theta$$

となる．与えられた境界値は，フーリエ級数 $f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$ によって表わされており，この境界関数が滑らかな導関数をもつものとする．このとき，§2.5.3 により，数列 $n^2|a_n|, n^2|b_n|$ の有界性が得られる．さて，関数 φ は

$$\varphi=\frac{1}{2}f_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n(r)\cos n\theta+g_n(r)\sin n\theta\right]$$

13 ［原註］この人名（ディリクレ）を付けた名称はリーマンによる導入以来定着しているが，歴史的な根拠に欠けるものである．

の形に表わされるとする．ただし，係数 $f_n(r)$, $g_n(r)$ は条件 $f_n(1) = a_n$, $g_n(1) = b_n$ を満たさなければならない．このとき再び三角関数の完全性によって，等式

$$D[\varphi] = \pi \int_0^1 f_0'(r)^2 r\,dr + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(f_n'(r)^2 + \frac{n^2}{r^2} f_n(r)^2 \right) r\,dr + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(g_n'(r)^2 + \frac{n^2}{r^2} g_n(r)^2 \right) r\,dr$$

が成り立つ．従って，もとの最小問題を解くためには，f_n および g_n を $r = 1$ において，それぞれ値 a_n, b_n をもつ滑らかな関数として，最小問題の系列

$$\int_0^1 \left(f_n'^2 + \frac{n^2}{r^2} f_n^2 \right) r\,dr = \text{最小}, \quad \int_0^1 \left(g_n'^2 + \frac{n^2}{r^2} g_n^2 \right) r\,dr = \text{最小} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

と取り組むことになる．これらの最小問題に対して，ワイエルシュトラスの近似定理によれば，関数 $1, r, r^2, \ldots$ は，リッツの方法で用いる座標関数の条件を確かにそなえている．f_n あるいは g_n として，次数 $m \geqq n$ の多項式 $c_{n,0} + c_{n,1} r + \cdots + c_{n,m} r^m$ で，条件 $c_{n,0} + c_{n,1} + \cdots + c_{n,m} = a_n$ あるいは，$\cdots = b_n$ をそれぞれ満たすものをとれば，（読者が）容易に確かめられるように，最小化の解として，m に関係なく，関数 $f_n = a_n r^n$, $g_n = b_n r^n$ が得られる．従って，n を固定したときの極小列の関数は互いに等しく，取りも直さず，これらの関数が問題の解を与えることがわかる．

変分問題の解 f_n または g_n を，リッツの方法を用いずに，直接次のようにして得ることもできる．まず，$n = 0$ に対しては $\int_0^1 f_0'^2 r\,dr$ を最小にしなければならないが，これは明らかに $f_0' = 0$, $f_0 = \text{定数} = a_0$ によって実現される．次に $n > 0$ に対しては $f_n(0) = g_n(0) = 0$ でなければならない．もしそうでなければ，f_n が微分可能だから，連続関数 h_n を用いて $f_n(r) = f_n(0) + r h_n(r)$ となり，従って積分の第 2 の部分が無限大になってしまう．さて，積分の最初のものを

$$\int_0^1 \left(f_n' - \frac{n}{r} f_n \right)^2 r\,dr + 2n \int_0^1 f_n f_n'\,dr = \int_0^1 \left(f_n' - \frac{n}{r} f_n \right)^2 r\,dr + n f_n^2(1)$$

と変形する．すると，$f_n(1) = a_n$ はすでに確定しているから，上式は $f_n' -$

$\frac{n}{r}f_n = 0$ のときに最小となり，その最小値は $nf_n(1)^2 = na_n^2$ であることが明らかである．これより $f_n = c_n r^n$ となるが，条件 $f_n(1) = a_n$ によって，結局，$f_n(r) = a_n r^n$ が得られる．$g_n(r)$ に対しても対応する結果が得られる．ゆえに，もとの最小問題の解は

$$(10) \qquad u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

で表わされ，求める最小値は $\pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2)$ である．

次のことを特に注意しておきたい．ここで解いた最小問題における境界関数にもっと一般的な仮定，たとえば，単に連続性だけの仮定を設けた場合には，問題として意味を失うことがある．たとえば，一様収束する係数 $\rho(\theta) = \varphi(1,\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(n!\theta)$ で定義される連続関数を境界関数にとると，和 $\pi \sum\limits_{m=1}^{\infty} m^2 a_m^2 = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}(n!)^2$ が無限大になる．簡単にわかるように，この場合には $D[\varphi]$ を有限にする引数関数 φ は存在しないのである．

(c) $g(x,y)$ を長方形 $R: 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b$ 内で与えられた滑らかな関数とする．長方形内でその 1 次導関数とともに連続であり，境界では 0 になるような φ のうちで，積分

$$(11) \qquad J[\varphi] = \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - 2\varphi g)\, dx\, dy$$

を最小にするものを求めよう．R の内部において

$$g(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin m\frac{\pi x}{a} \sin n\frac{\pi y}{b} \quad \text{かつ}$$

$$\varphi = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m\frac{\pi x}{a} \sin n\frac{\pi y}{b}$$

とおき，c_{mn} を求めるべきパラメータとすれば，変分問題は，三角関数の完全性関係から

$$\frac{4}{ab}J[\varphi] = \pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) c_{mn}^2 - 2\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} c_{mn}$$

を最小にする数 c_{mn} を求めよという問題に帰着する．これより，最小が

$$c_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^2\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)},$$

(12)
$$u(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}} \sin m\frac{\pi x}{a} \sin n\frac{\pi y}{b}$$

によって与えられることがすぐにわかる．実際，この関数が課せられた条件をすべて満たしていることは，級数自身および項別微分して得られる級数がいずれも一様収束することからわかる．それらの級数に対し，絶対収束な級数

$$\sum \frac{|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad \sum \frac{m|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad \sum \frac{n|a_{mn}|}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

がそれぞれ優級数になっているからである．後に（p. 205 参照）この関数 u が微分方程式 $u_{xx} + u_{yy} = g(x,y)$ を満たすことを，また例 (a) の関数 $u(x,y)$，および，例 (b) の $u(r,\theta)$ が，$g \equiv 0$ とした同じ微分方程式を満たすことを見るのである．

4.2.4　変分法の直接解法についての原理

変分法の直接解法を遂行する，あるいは正当化する上での主な困難は，ある問題の極小列が極限関数に収束するとは限らない点にある．それは，問題の解の存在が確かな場合でも同様である．従って，どのような場合でも，極小列を得ただけで解を求めたとは期待してはいけない．

極小曲面の変分問題がその例として役立つ．この問題では，積分

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

を最小にするのであるが，比較する曲面 $z = z(x,y)$ としては，G の境界の真上で与えられた空間曲線を通り，面積をもつ曲面のすべてを許容する．もしこの空間曲線として，特に xy-平面上の曲線，たとえば面積 1 の円をとれば，最小は関数 $z = 0$，すなわち xy-平面自身によって確かに到達される．この場合の極小列は，円を周にもち，面積が 1 に近づく任意の曲面列である．ところが，面積が 1 にいくらでも近いが，一方それに対する $z(x,y)$ がある点で 0

といくらでも大きく異なっている許容曲面を与えることは容易である．たとえば xy-平面の上に高さがいくらでも大きく，十分細い直円錐で表面積が指定された限界より小さいものを考えることができる．比較曲面として，この円錐と残りは xy-平面からなる曲面をとる．このような曲面をもつ極小列は解に収束しない．さらに，容易にわかるように，発散する点が円内にいたる所密に分布するような極小列をつくることさえ可能である．

さらなる例は次のディリクレの問題である．それは積分 $D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$ を，比較に際して G 内で区分的に滑らかな連続関数で，境界において 0 になる任意の関数を許容し，最小にする問題である．明らかに $\varphi = 0$ が問題の一意の解である．なぜなら，他の引数関数は積分を正にするのに対し，$\varphi = 0$ はそれを 0 にするからである．G の任意の内点 P の周りの極座標 r, θ を導入すれば，積分は $\iint_G \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\theta^2\right) r\, dr\, d\theta$ の形になる．G 内に完全に含まれる半径 $a < 1$，中心 P の円 $r \leqq a$ を考え，この円の外では $\varphi = 0$, $r = a$ と $r = a^2$ の間の円環では $\varphi = \frac{1}{\log a} \log \frac{r}{a}$，最後に円 $r \leqq a^2$ の中で $\varphi = \frac{1}{\log a} \log a = 1$ とおく．φ は定義通りの引数関数である．積分は $\frac{2\pi}{(\log a)^2} \int_{a^2}^{a} \frac{1}{r^2} r\, dr = -\frac{2\pi}{\log a}$ に等しい．ここで，a の値を 0 に近づく数列 a_1, a_2, a_3, ... をたどって変化させる．対応する関数 φ_1, φ_2, φ_3, ... に対して $D[\varphi_n]$ は 0 に収束し，極小列が得られる．しかしながら点 P において，極小列のすべての関数の値は 1 であり，従って，問題の解 $\varphi = 0$ には収束しない．

より簡単な問題，すなわち $y(x)$ を連続で，区分的に滑らかな，$x = 0, 1$ で 0 になる x の関数としたときの変分問題

$$\int_0^1 y'^2\, dx = \text{最小}$$

においては，極小列が常に関数 $y = 0$ に収束することはすぐわかる．しかし極小列をなす関数の導関数がそうであるとは限らないことは，たとえば，$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ としたときの関数列

$$\begin{cases} y_n = x & (x < \varepsilon_n) \\ y_n = 2\varepsilon_n - x & (\varepsilon_n \leqq x \leqq 2\varepsilon_n) \\ y_n = 0 & (2\varepsilon_n < x) \end{cases}$$

によって示される．

我われは下巻第 8 章で，多くの場合にこのような困難がいかにして克服されるか，さらに，変分法の直接解法がいかに強力な解析学の補助手段であるかを見るであろう．他方，変分法の間接解法は，最小問題の本質への踏み込みは根本的ではないともいえるが，それだけにより一般的であり，かつ，形式的な扱いがより容易である．間接解法の核心は，変分問題を微分方程式の問題に帰着させることにあり，オイラー，ラグランジュ以来最近まで優先して推進されたものである．これからの諸節はその記述に当てられる．

4.3　変分法におけるオイラーの方程式

オイラーが最初に導いた変分問題の微分方程式は，与えられた積分に極値をとらせるために，関数が満たすべき必要条件だけを述べたものであって，決して十分条件ではない．

この微分方程式を得るためには，変分の問題を微分法の問題に帰着させるのである．なお以下を通して，登場する関数とその導関数は，特に反対向きのことをいわない限り，連続であると仮定することを，ここでことわっておこう．

4.3.1　変分法の最も簡単な問題

まず第一に，変分法の最も簡単な問題として，積分

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \tag{13}$$

の極小を求める問題を取り上げよう．ここで $x_0, x_1, y(x_0), y(x_1)$ の値は与えられたものとする．関数 F は，3 個の引数 x, y, y' について 2 階まで連続微分可能であるとする．関数 $y(x)$ については 2 階導関数 y'' の連続性を仮定しよう．いま $y = y(x) = f(x)$ を，積分 $J[y]$ を極小にする関数という意味での極値関数[14]であるとする．ただし，ここでいう極小とは，関数 $y = f(x)$ の十分

[14] ［訳註］極大あるいは極小を与えるのが極値関数である．あとではより正確な用語として停留関数が用いられる．

小さい近傍 (h) において F の積分 $J[y]$ の値が $y = f(x)$ のときに最小になるという意味である．さて，区間 $x_0 \leqq x \leqq x_1$ で定義され，連続な 2 階導関数をもち，区間の両端で 0 となるという制限以外には任意に選ばれた関数 $\eta(x)$ を考え，さらに，パラメータ ε を用いて関数 $\bar{y} = y + \varepsilon\eta(x) = y + \delta y$ をつくる．$\delta y = \varepsilon\eta(x)$ という量を関数 $y = f(x)$ の**変分**と呼ぶ．パラメータ ε の絶対値を十分小さくとれば，変分付きの（許容）関数 $\bar{y}$ はすべて極小関数 $y = f(x)$ の任意に小さく選んだ近傍内に入る．それゆえ，積分 $J[\bar{y}] = J[y + \varepsilon\eta]$ を ε の関数とみなしてこれを $\Phi(\varepsilon)$ と書けば，$\Phi(\varepsilon)$ は絶対値の十分小さいすべての ε に対する最小値を $\varepsilon = 0$ でとる．よって，$\Phi'(0) = 0$ でなくてはならない．積分記号下で

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')\,dx$$

を微分することが許されるので，極小性の必要条件として

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_y\eta + F_{y'}\eta')\,dx = 0$$

が得られる．この式は上の制約のもとで任意に選ばれた関数 $\eta(x)$ に対して成立しなければならない．条件 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ に注意して積分内の第 2 項を部分積分によって変形すれば，どの $\eta(x)$ に対しても成り立つべき方程式

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx = 0$$

が得られる．

この方程式から，次の**変分法における基本補題**を用いることにより，求めている微分方程式が直ちに導かれる．その補題とは,「x の連続関数 $\varphi(x)$ について，区間の両端で 0 に等しく 2 階導関数まで連続である，すべての関数 $\eta(x)$ に対して条件 $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\varphi(x)\,dx = 0$ が満たされているならば，$\varphi(x)$ は実は恒等的に 0 である」という主張である．この補題は多重積分の場合にも同様に成り立つのであるが，背理法を使って簡単に証明できる．すなわち，もし $\varphi(x)$ がある点 $x = \xi$ で 0 でなかった，たとえば正であったと仮定すると，点 ξ のある近傍 $G : \xi_0 < x < \xi_1$ において $\varphi(x)$ が正であって，たとえば正数 δ より大きいと考えてよい．そこで，G 内では $\eta(x) = (x - \xi_0)^4(x - \xi_1)^4$, G 外では $\eta(x) = 0$ ととれば，確実に $\int_{x_0}^{x_1} \eta\varphi\,dx > 0$ となって仮定に反する．た

とえ関数 η に対して k 階導関数まで連続であるという条件をつけたとしても，$\varphi \equiv 0$ という結論には変わりがない．そのときには $\eta = (x-\xi_0)^{2l}(x-\xi_1)^{2l}$，ただし $2l > k$ とおきさえすればよい．さて，この基本補題から直ちに，関数 $\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y$ が恒等的に 0 であることが導かれる．なお，この関数を $-[F]_y$ と略記する．すなわち，関数 $y(x)$ は微分方程式

$$-[F]_y = \frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0 \tag{14}$$

を，あるいはもっと明示的に書き下せば

$$y''F_{y'y'} + y'F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0 \tag{14'}$$

を満たさなければならない．これが基本的な**オイラーの微分方程式**であり，その形は，解析学やその応用にしばしば現れる．この方程式は，**極値問題の解が満たすべき必要条件**である．これは 2 階の微分方程式であり，一般解には 2 個の任意定数が含まれるが，それは境界条件を満足させるのに丁度必要な個数である．オイラーの微分方程式の**任意の**解を，最小問題の**極値関数**と呼ぶことにする．また微分式 $[F]_y$ を F の y に関する**変分導関数**と呼ぶ．これは通常の極値問題における微分商（係数）と同じ役割を果たすものである．

微分方程式論では普通であるように，オイラーの方程式を最高階の導関数について解こうとするならば

$$F_{y'y'} \neq 0$$

を仮定しなくてはならない．この不等式は**ルジャンドルの条件**と呼ばれ，極値関数が実際に極値を与えるかどうかを判定する際に重要な役割を果たすのである（§4.6, p. 227 以下も参照）．

上の考察で本質的なことは，極値関数 $y(x)$ をパラメータ ε を含む関数族 $y(x;\varepsilon) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ の中に埋め込んだことである．パラメータの入り方が線形であるのは重要なことではない．もっと一般の関数族 $y(x;\varepsilon)$ の中に埋め込むこともできる．その場合には

$$\eta(x) = \frac{\partial}{\partial_\varepsilon} y(x,\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

とおけば，上と同じ議論が通用する．

ここで役に立つ用語を導入しておこう．前に関数 $\varepsilon\eta = \delta y$ を $y(x)$ の変分と呼んだように，境界で η が 0 でない場合についても，表式

(15)
$$\begin{cases} \delta J = \varepsilon \Phi'(0) = \varepsilon \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} (\eta F_y + \eta' F_{y'})\, dx = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \eta\, dx \\ \qquad + \varepsilon F_{y'} \eta \Big|_{x=x_1} - \varepsilon F_{y'} \eta \Big|_{x=x_0} = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta y\, dx + F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} \end{cases}$$

を積分 J の**変分**と，より正確には，J の**第 1 変分**と呼ぶのである．この用語法は，不定パラメータ ε を用いて書いた表式 $\varepsilon f'(x) = df$ のことを $f(x)$ の微分と呼んだのと類似な言い方である．この用語を用いれば，**極小となる必要条件は J の第 1 変分が 0 になることである**．

一般に変分 δJ を 0 にする関数あるいは幾何学的にいえば曲線（すなわち極値関数あるいは極値曲線）のことを，**停留関数**あるいは**停留曲線**ともいう．微分法の極値問題のときと同様に，実際には極値でない可能性もあるという事情を正面に出したいからである．事実，主な関心が，極値よりも変分が 0 になるかどうかの問題に向けられる多くの場合がある．そこで，停留値にのみに関する問題も変分問題と呼ぶのである．

前に取り扱った例（p. 181, p. 182 参照）での変分導関数は以下のようになる：

(a)
$$F = \sqrt{e + 2fv' + gv'^2},$$
$$\frac{d}{du} \frac{f + gv'}{\sqrt{e + 2fv' + gv'^2}} - \frac{e_v + 2f_v v' + g_v v'^2}{2\sqrt{e + 2fv' + gv'^2}} = 0,$$

(b) $$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(x, y)} = \psi(x, y)\sqrt{1 + y'^2}, \quad \psi y'' = (\psi_y - \psi_x y')(1 + y'^2),$$

(c) $$F = y\sqrt{1 + y'^2}, \quad yy'' = 1 + y'^2 \quad \text{((b) の特別な場合)},$$

(d) $$F = y\sqrt{1 - y'^2}, \quad yy'' = y'^2 - 1.$$

これらの微分方程式を解くことは §4.4 で行なう．

4.3.2　未知関数が複数の問題

変数 x の複数個の関数 $y(x)$, $z(x)$, ... を含む積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots)\, dx \tag{16}$$

が極値（あるいは停留値）になるように——やはり，境界条件のもとで，これらの関数を定めるときも，事情は最も単純な問題のときと全く同様である．任意の——境界で0となる——関数 $\eta(x)$, $\zeta(x)$, ... を導入し，関数系 $y = y(x) = f(x)$, $z = z(x) = g(x)$, ... が極値を与えるとして，前と同様に論を進める．すなわち，関数

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1\eta, z + \varepsilon_2\zeta, \ldots, y' + \varepsilon_1\eta', z' + \varepsilon_2\zeta', \ldots)\, dx$$

が $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \ldots$ のときに極値にならねばならない．よって，$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\right)_0 = 0, \ldots$ である[15]．これは次のように書き表してもよい：

$$\begin{aligned}
\delta J &= \varepsilon_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)_0 + \varepsilon_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\right)_0 + \cdots \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \big((F_y\eta + F_{y'}\eta')\varepsilon_1 + (F_z\zeta + F_{z'}\zeta')\varepsilon_2 + \cdots\big)\, dx = 0.
\end{aligned}$$

この表式 δJ を J の第1変分と呼ぶのであるが，前と同様にして，次のように変形できる：

$$\left\{\begin{aligned}
\delta J = \varepsilon_1 F_{y'}\eta\Big|_{x_0}^{x_1} + \varepsilon_2 F_{z'}\zeta\Big|_{x_0}^{x_1} + \varepsilon_1 \int_{x_0}^{x_1} \eta\Big(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\Big)\, dx \\
+ \varepsilon_2 \int_{x_0}^{x_1} \zeta\Big(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\Big)\, dx + \cdots.
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

ただし，いまの場合には境界値の項は0となるので現れない．$\delta J = 0$ となるための条件として，関数 η, ζ, ... の中のどれか1つだけを任意関数にとり，それ以外を0とおけば，前の場合の論法に従って以下のオイラーの微分方程式系が得られる：

---

15 ［原註］括弧につけた添字0は，括弧内の表式で $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$ とおくことを示す．

$$(18)\quad \begin{cases} -[F]_y = \dfrac{d}{dx}F_{y'} - F_y \\ \qquad = F_{y'y'}y'' + F_{y'z'}z'' + \cdots + F_{y'y}y' + F_{y'z}z' + \cdots \\ \qquad\qquad + F_{y'x} - F_y = 0, \\ -[F]_z = \dfrac{d}{dx}F_{z'} = F_z \\ \qquad = F_{z'y'}y'' + F_{z'z'}z'' + \cdots + F_{z'y}y' + F_{z'z}z' + \cdots \\ \qquad\qquad + F_{z'x} - F_z = 0. \end{cases}$$

こうして,「空間曲線」$y = f(x)$, $z = g(x)$, ... の極値性のための必要条件,あるいは停留性のための必要条件として,方程式系 (18) という未知関数 $y, z, \ldots$ の個数と同数の 2 階微分方程式からなる条件が得られた.

「最も単純な問題」について前小節で行なった議論はすべて,いまの場合にも通用する.ただし,第 1 変分が 0 であるということは,積分が極値をとるための必要条件であるというばかりではなくて,積分がたとえば関数 $y(x)$ の変分に対しては極小となるが関数 $z(x)$ の変分に対しては極大となるという状況のための必要条件でもある(結局は,一般の停留点のための必要条件である)ことをつけ加えておこう.

ここでもまた,上の微分方程式系の**任意の**解(曲線)を**極値関数**と呼ぶ[16].

オイラーの方程式 (18) の最も簡単な例は,通常のユークリッド空間における,あるいは線要素が

$$ds^2 = g_{11}\,dx^2 + g_{22}\,dy^2 + g_{33}\,dz^2 + 2g_{12}\,dx\,dy + 2g_{13}\,dx\,dz + 2g_{23}\,dy\,dz$$

で与えられる**非ユークリッド空間における最短路を定める問題**である.

この場合には

$$F = \sqrt{g_{11} + 2g_{12}y' + 2g_{13}z' + g_{22}y'^2 + 2g_{23}y'z' + g_{33}z'^2}$$

であるから,この空間の「測地線」に対して 2 個の微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g_{12} + g_{22}y' + g_{23}z'}{F}\right) - \frac{1}{2F}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial y}y' + \cdots\right) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g_{13} + g_{23}y' + g_{33}z'}{F}\right) - \frac{1}{2F}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial z} + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial z}y' + \cdots\right) = 0$$

16 [訳註] 本来ならば停留関数と呼ぶべきであろう.

が得られる．これはユークリッド空間

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

の場合には

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

となり，空間のすべての直線によって満たされる．

光の速度が $\varphi(x, y, z)$ で与えられるような3次元媒質中の**光の伝播**は，変分問題

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\varphi(x, y, z)}\, dx = \text{最小}$$

によって特徴づけられる．もっと一般に，光速が光線の方向にも依存する場合，従って光速を $\varphi(x, y, z, y', z')$ の形に表わすべき場合に，光路を定める問題，すなわち，幾何光学の問題も，$F = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\varphi(x,y,z,y',z')}$ とおきさえすれば，我われの変分問題と完全に同等とみなしてよい．

4.3.3　高次導関数を含む問題

積分

(19)
$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

の変分問題を考えるのであるが，F は引数 x, y, y', y'', …, $y^{(n)}$ の与えられた関数であり，比較の対象として許容される関数 y の範囲は，$2n$ 階導関数まで連続で，境界においては関数値と $(n-1)$ 次導関数までの値が与えられた値をとる関数のすべてであるとする．いまの場合にも，これまでと全く同様にしてオイラーの微分方程式を導くことができる．まず，$\eta(x)$ を $2n$ 階までの導関数が連続で，境界点 $x = x_0$, $x = x_1$ においては条件 $\eta(x) = 0$, $\eta'(x) = 0$, …, $\eta^{(n-1)}(x) = 0$ を満たす任意の関数とする．そうすると前と全く同様に第1変分 $\delta J = \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} J[y + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}$ として

$$\delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \eta + F_{y'} \eta' + \cdots + F_{y^{(n)}} \eta^{(n)}\right] dx$$

が得られ，必要な部分積分を繰り返せば η の導関数をすべて消し去ることができるから，δJ は次の形に変わる：

$$\text{(20)}\quad \delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \eta \Big[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \Big]\, dx.$$

そこで前出の補題によって，極値のための必要条件として，$2n$ 階の微分方程式

$$\text{(21)}\qquad [F]_y = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y(n)} = 0$$

を得る．これを，やはりオイラーの方程式という．(21) の一般解に含まれる $2n$ 個の積分定数は $2n$ 個の境界条件から定まると考えてよい．

なお，変分問題

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \ldots, y', z', \ldots, y'', z'', \ldots)\, dx = \text{最小}.$$

から，複数の関数 y, z, ... を定める際も，オイラーの微分方程式系を導く論法は全く同様に進められる．

4.3.4 多変数の問題

これまで扱ってきた積分の極値問題を常微分方程式の問題に帰着したのと同じような論法により，多重積分の極値を求める変分問題は，求める関数に対する 1 個または複数個の偏微分方程式の問題となる．たとえば，2 階導関数まで連続な関数 u に対して，与えられた領域 G にわたる 2 重積分

$$\text{(22)}\qquad J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

の極値を求める問題を考えてみよう．ただし，関数 u の境界値は与えられているとする．今度もまた，境界条件 $\eta = 0$ を満たす任意関数 $\eta(x, y)$ を導入し，極値のための必要条件として第 1 変分

$$\delta J = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} \varPhi(\varepsilon) \right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} J[u + \varepsilon\eta] \right)_{\varepsilon=0}$$

が 0 となること，すなわち

$$\delta J = \varepsilon \iint_G (F_u \eta + F_{u_x} \eta_x + F_{u_y} \eta_y)\, dx\, dy = 0 \tag{23}$$

という式が得られる．これを部分積分によって変形しよう．領域 G の境界（曲線）Γ が区分連続的に変化する接線をもつ（断片的に滑らか）と仮定する．そうすると，ガウス (Gauss) の積分定理[17]によって次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\iint_G (\eta_x F_{u_x} + \eta_y F_{u_y})\, dx\, dy &= \int_\Gamma \eta (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) \\ &\quad - \iint_G \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx\, dy.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\delta J &= \varepsilon \int_G\!\!\int \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx\, dy \\ &\quad + \varepsilon \int_\Gamma \eta (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) \\ &= \iint_G \delta u [F]_u\, dx\, dy + \int_\Gamma \delta u (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx) = 0\end{aligned}$$

となる．さらに，u に対する境界値指定の仮定によって，境界上では $\eta = 0$ であるから

$$\delta J = \varepsilon \iint_G \eta \left\{ F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right\} dx\, dy = 0 \tag{24}$$

が得られる．方程式 $\delta J = 0$ は任意の連続微分可能な η に対して成り立たなくてはならない．§4.3.1 の基本補題は単一積分に対すると同様に重複積分に対しても証明され，今回も適用できる．よって，直ちに次のオイラーの微分方程式

$$-[F]_u = \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - F_u = 0 \tag{25}$$

が導かれる．書き下した形では，これは

$$F_{u_x u_x} u_{xx} + 2F_{u_x u_y} u_{xy} + F_{u_y u_y} u_{yy} + F_{u_x u} u_x + F_{u_y u} u_y$$

---

[17] ［原註］たとえば，Courant, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Bd. II, p. 246.

$$+F_{u_x x}+F_{u_y y}-F_u=0$$

となる．この方程式のすべての解の集合の中から，特定のものを与えられた境界条件に応じて決定しなくてはならない．(**境界値問題**)．

もし求めるべき未知関数が2個以上ある場合には，上のような微分方程式の系が得られる．また，関数 F が n 階までの偏導関数 $u_x, u_y, \ldots, u_{yy\cdots y}$ を含んでいる場合には，$2n$ 階の微分方程式

$$(26)\quad \begin{cases} [F]_u = F_u - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y} \\ \qquad + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{u_{xy}} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}} + \cdots \\ \qquad + (-1)^n \dfrac{\partial^n}{\partial y^n}F_{u_{yy\ldots y}} = 0 \end{cases}$$

が得られる．

例として $F=\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)$ (p. 190 参照) を考察しよう．このときオイラーの方程式は**ポテンシャル方程式**

$$\Delta u = u_{xx}+u_{yy}=0$$

である．

関数 $F=\frac{1}{2}(\Delta u)^2=\frac{1}{2}u_{xx}^2+u_{xx}u_{yy}+\frac{1}{2}u_{yy}^2$ の場合のオイラーの方程式は

$$\Delta\Delta u = u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$$

となる．ところが，$F=(\Delta u)^2-c(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)$ (c は定数) であるときも同じオイラーの方程式が得られる．

極小曲面の問題，すなわち $F=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$ の場合においては，オイラーの方程式は

$$z_{xx}(1+z_y^2)-2z_{xy}z_x z_y+z_{yy}(1+z_x^2)=0$$

となる．

4.3.5 恒等的に0となるオイラーの微分式——発散形式

被積分関数 $F(x,y,y',\ldots)$ によっては，それに対するオイラーの微分式が，

任意の引数関数に対して恒等的に 0 となることが起こり得る.（領域内の）任意の点 x において $y, y', \ldots$ が指定された値をとるような引数関数を構成することが可能であるから，引数関数 y についてオイラーの微分式 $[F]_y$ が恒等的に 0 になるということは，微分式中の $x, y, y', \ldots$ を独立なパラメータ（引数）とみなしたときにこの表式が恒等的に 0 となることと同等である．オイラーの微分方程式が恒等的に 0 となる場合についての同じ主張は，独立変数が複数個ある引数関数の場合に対していえる．

最も簡単なのは引数関数が $F(x,y,y')$ の場合である．オイラーの微分式 $F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{yy'}y''$ が恒等的に 0 になることから，まず $F_{y'y'} = 0$, 従って F は $F = A(x,y) + y'B(x,y)$ の形である．それゆえオイラーの微分方程式は積分可能条件

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

となり，積分

$$\int_{x_0}^{x} F\,dx = \int_{x_0}^{x} (A + By')\,dx = \int (A\,dx + B\,dy)$$

は，積分学で知られている定理によって，確かに積分曲線によらない値になる[18]．上端の x を変数とみなせば，右端の積分は上端の端点の関数（たとえば）$G(x,y)$ である．よって

$$F(x,y,y') = \frac{d}{dx}G(x,y)$$

と書ける．直ちにわかるように，これは，F のオイラーの微分式が恒等的に 0 となるための必要条件であるだけでなく十分条件でもある．

被積分関数が $F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$ の場合も事情は同様である．すなわち，オイラーの微分式 $[F]_y$ が恒等的に 0 となるための必要かつ十分な条件は，F が

$$F = \frac{dG}{dx}$$

という形に書けることである．ここで $G(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ は y の $(n-1)$

18 ［原註］積分値が積分曲線によらないことは，オイラーの表式が恒等的に 0 となることから直接にでもわかる．

階導関数までしか含んでいない．

この条件が十分であることは直接の計算からもわかるし，あるいは次のような考察により確かめることもできる．すなわち，積分 $\int_{x0}^{x_1} F\,dx$ は上下端での関数 y とその $(n-1)$ 階までの導関数の値だけにしか依存しないので，この境界値を固定した上で y の内部の点で任意に変化させても積分の値は変わらない．よって，第 1 変分は恒等的に 0 となること，すなわちオイラーの微分式が恒等的に 0 となることが得られるのである．

条件が必要であることを見るために，パラメータ α を含む関数族 $y(x,\alpha)$ を考察しよう．関数族 $y(x,\alpha)$ の境界値 $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ は α によらないで定まっているとする．引数関数 $y(x,\alpha)$ に対する積分を $J(\alpha)$ と書くことにすると，第 1 変分の公式により

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \frac{\partial y}{\partial \alpha}\,dx$$

が成り立つから，仮定により $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$ である．従って，積分 J は α に依存せず，ただ座標 x_0 と x_1，および端点での y とその $(n-1)$ 階までの導関数だけの関数である．そこで，積分の下端を固定して上端 x_1 を変化させると考えれば，次の形の方程式

$$\int_{x_0}^{x_1} F\bigl(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\bigr)\,dx = G\bigl(x_1, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\bigr)$$

を得る．上端点の座標で微分すれば，証明すべき式が得られる．

多変数で 1 階変動関数までしか含まない関数 $F(x, y, u, u_x, u_y)$ の積分の場合も事情は全く同じで，上に述べたことと同様に次の定理が得られる：

《定理》 オイラーの微分式 $[F]_u$ が（引数）関数 u に関して恒等的に 0 となるための必要十分条件は，F が

$$F = A_x + B_y$$

の形に表わされることである．ただし A と B は x, y, u の関数である．この形の表式を**発散形式**と呼ぶ．

発散形式を特徴づける性質は，関数 u を G の内部の部分領域だけで変化させる限りは，2 重積分 $\iint_G F\,dx\,dy$ の値に変化が起こらないということである．□

ガウスの積分定理によれば，発散形式に対しては

$$\iint_G F\,dx\,dy = \int_\Gamma (A\,dy - B\,dx)$$

が成り立つ．ここで右辺の積分は G の境界である曲線 Γ を正の向きに一周する線積分である．

被積分関数 F が2階以上の偏導関数を含んでいるときには，事情はいくらか複雑になる．オイラー表式が恒等的に0となるための必要十分条件が，F が

$$F = A_x + B_y$$

の形に表現できること，すなわち発散形式であること，という定理はこの場合にもやはり成り立つ．しかしその際は，A と B を，それに含まれる導関数の最高階数が F におけるそれより低くなるように選ぶことは，一般にはできない．

2階の発散形式の最も簡単な例は $F = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ である．(この F は)また次のようにも書ける：

$$\begin{aligned} F &= (u_x u_{yy})_x - (u_x u_{xy})_y = -(u_y u_{xy})_x + (u_y u_{xx})_y \\ &= -\frac{1}{2}\left[(u_x^2)_{yy} - 2(u_x u_y)_{xy} + (u_y^2)_{xx}\right]. \end{aligned}$$

また別の例が恒等式

$$\begin{aligned} \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_{xx}u_y}{(u_x^2+1)\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{xy}u_y}{(u_x^2+1)\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right] \end{aligned}$$

によって与えられる．左辺の表式

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

は，周知のように，曲面 $z = u(x, y)$ のガウス曲率に $(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}$ を掛けたものである．そしてこの表式が発散形式になっていることが，曲面の曲率の積分，すなわち全曲率が，この面の境界沿いの接平面のみに依存するとい

うよく知られた事実をもたらすのである.

上記の考察による，直接の結果として次の定理が導かれる：

《定理》 2 つの変分問題の被積分関数の間に発散形式だけの差しかない場合には，オイラーの方程式，従って両方の変分問題の極値関数の集合体は，完全に一致する．□（p. 224 の脚注 26 参照.）

4.3.6　オイラーの微分方程式の同次形

曲線や曲面を，最小条件によって決定する幾何学的問題では，座標のどれかを独立変数にとることはしないで，曲線なら $x = x(t)$, $y = y(t)$，曲面なら $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ のようにパラメータ表示（媒介変数表示）を用いる方が問題の性質に適合する．このときには t や u, v は独立なパラメータであり，それらの関数である座標については，それぞれ

$$\dot{x} = \dot{y} = 0$$

とならず，また

$$x_u y_v - x_v y_u = y_u z_v - y_v z_u = z_u x_v - z_v x_u = 0$$

とならないと仮定する．ここで x と y の上の点 $(\dot{\ })$ は t に関する微分を表わす．最初に次のような最も簡単な変分問題を考えよう：

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt = 最小, \tag{27}$$

ただし

$$\mathcal{F} = \dot{x} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

である．この関数 $\mathcal{F}$ は導関数 $\dot{x}$, $\dot{y}$ について次数 1 の「同次」性をもつ．すなわち，あらゆる k の値に対して同次性の条件

$$\mathcal{F}(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \tag{28}$$

を満たし，また，これを k で微分してから $k = 1$ とおいて得られる方程式

$$\dot{x}\mathcal{F}_{\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{\dot{y}} = \mathcal{F} \tag{29}$$

も満足する．逆に $\mathcal{F}$ が $\dot{x}$ と $\dot{y}$ について 1 次の同次関数[19]であり，従って方程式 (28) を満たすならば，変分問題 $\int \mathcal{F}\,dt =$ 最小は，パラメータの選び方によらない曲線を定める．なぜなら，もしパラメータの変換 $t = \tau(t)$（$\frac{dt}{d\tau} > 0$ とする）によって区間 $t_0 \leqq t \leqq t_1$ が区間 $\tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_1$ に写ったとするならば，(28) によって次式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathcal{F}\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathcal{F}\left(x, y, \dot{x}\frac{dt}{d\tau}, \dot{y}\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \frac{dt}{d\tau} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt.\end{aligned}$$

従って，変分問題は曲線の向きを変えないパラメータの変換に対しては不変であって，極値曲線はパラメータの選び方には依存しない．

同次形に表わされた問題には 2 個のパラメータのオイラーの微分方程式

$$\mathcal{F}_x - \dot{\mathcal{F}}_{\dot{x}} = 0, \quad \mathcal{F}_y - \dot{\mathcal{F}}_{\dot{y}} = 0 \tag{30}$$

が従属することになる．この両方程式は，関係式 (29) と合わせて，実質的に本来の微分方程式 (14) と同値のはずであるから，互いに独立ではあり得ない．この相互依存の関係を見るために，(29) をさらに微分して次の恒等式を導く：

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_x = \dot{x}\mathcal{F}_{x\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{x\dot{y}}, \qquad \mathcal{F}_y = \dot{x}\mathcal{F}_{y\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{y\dot{y}}, \\ \dot{x}\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{y}} = 0, \qquad \dot{x}\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y}\mathcal{F}_{\dot{y}\dot{y}} = 0, \\ \mathcal{F}_{\dot{x}\dot{x}} : \mathcal{F}_{\dot{x}\dot{y}} : \mathcal{F}_{\dot{y}\dot{y}} = \dot{y}^2 : -\dot{x}\dot{y} : \dot{x}^2.\end{gathered}$$

ここで共通の項

$$\frac{\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{\mathcal{F}_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}$$

を習慣に従って $\mathcal{F}_1$ で表わすことにしよう．

---

19 ［原註］幾何学的な例ではしばしば，関数 $\mathcal{F}$ は正同次（訳註：positively homogeneous（英））であるというだけで，完全な意味での同次ではないことが多い．というのは，同次の場合には，もし曲線を反対向きにたどるときには積分の符号が逆になる．ところが，たとえば正の平方根である孤の長さ $\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$ のような場合には，たどる向きを変えても等しい値になる．従って，上の考察はそのような正同次である積分についても成り立つのである．

上の恒等式から

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x - \dot{\mathcal{F}}_{\dot{x}} &= \dot{x}\mathcal{F}_{x\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{x\dot{y}} - \mathcal{F}_{\dot{x}x}\dot{x} - \mathcal{F}_{\dot{x}y}\dot{y} - \mathcal{F}_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} - \mathcal{F}_{\dot{x}\dot{y}}\ddot{y} \\ &= \quad \dot{y}[\mathcal{F}_{x\dot{y}} - \mathcal{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathcal{F}_1], \\ \mathcal{F}_y - \dot{\mathcal{F}}_{\dot{y}} &= -\dot{x}[\mathcal{F}_{x\dot{y}} - \mathcal{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathcal{F}_1]\end{aligned}$$

となるので，(30) の 2 つの方程式は恒等式

(31)
$$\dot{x}(\mathcal{F}_x - \dot{\mathcal{F}}_{\dot{x}}) + \dot{y}(\mathcal{F}_y - \dot{F}_{\dot{y}}) = 0$$

によって結びつけられて，たとえば

(32)
$$\mathcal{F}_{x\dot{y}} - \mathcal{F}_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathcal{F}_1 = 0$$

という 1 つの等式でおきかえることができる．

複数個の 1 変数関数を決める問題でも，事情は全く同様である．このときには，変分問題

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt = \text{最小}$$

は，問題

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt = \text{最小}$$

に変わる．ここで $\mathcal{F} = \dot{x}F(x, y, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}})$ である．この関数 $\mathcal{F}$ は変数 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ について結局次数 1 で同次である．

同次形表現を用いることによる利益は，対称性という形式上の利点だけではない．その例として，x が単調に増大するわけではない曲線，たとえば閉曲線である．それらについては $y = y(x)$ という表し方ができないので，非同次な表現ではそのままには扱うことができない．

多次元の変分問題の同次な表現は，次のようにして形成される．積分

$$\iint F(x, y, z, z_x, z_y)\, dx\, dy$$

の中で変数 x, y と関数 z とを 2 個のパラメータ u, v の関数とおく．ただし x と y の u と v に関する関数行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - x_v y_u$$

の値が0にはならないようにする．そうすると

$$z_x = \frac{z_u y_v - z_v y_u}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad z_y = -\frac{z_u x_v - z_v x_u}{x_u y_v - x_v y_u}$$

となり，積分は次の形をとる：

(33)

$$\begin{cases} \displaystyle\iint F(x, y, z, z_x, z_y)\, dx\, dy \\ \displaystyle = \iint F\left(x, y, z, -\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} : \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, -\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} : \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv \\ \displaystyle = \iint \mathcal{F}\left(x, y, z, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du\, dv. \end{cases}$$

ここで被積分関数 $\mathcal{F}$ は最後の3個の引数について次数1で同次である．前に1重積分の場合に導いた関係式，特に従属性の式(31)と微分方程式の対称的な形(32)とは，多変数の場合にも然るべく一般化される．ただし本書でそれらを使うことはないから，文献[20]を挙げるだけにしよう．

4.3.7　許容条件を緩くした変分問題 ——デュ・ボア-レイモンとハールの定理

これまで変分をとる際に許容される比較関数には，オイラーの微分方程式に現れる最高階の導関数まで連続であるもの，という要求をしてきた．変分問題の立場からすると，この要求は不自然に厳しいように見える．たとえば，被積分関数が $F(x, y, y')$ の変分問題では，1階導関数の区分的連続性さえ要求しておけば，2階導関数に関する仮定がなくてもすでに意味をもっている．ただ，このように許容条件を緩めたときは，もしかしてオイラーの微分方程式を満たさないような別の解が出てくるのではないかと心配して当然である．

最初に従来の形の極小問題を考察し，連続な1階および2階導関数をもつ関数 $y(x)$ が，同じ性質をもつ比較関数の中での極小を与えていると仮定し

[20] ［原註］Bolza, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung, pp. 666–671, Leipzig 1909.—Kobb, G.: Sur les maxima et minima des intégrales doubles. Acta Math. 16, pp. 65–140, 1892/93.

よう．実はこのとき，**この関数 $y(x)$ は，関数自身および 1 階導関数までの連続性しか仮定しない比較関数 y^* の中でも極小を与える**ものである．なぜならば，ワイエルシュトラスの近似定理によって，導関数 $y^{*\prime}$ は多項式 $p'(x)$ で，また y^* は多項式 $p(x)$ で，しかも境界条件 $p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1$ を満足させながらいくらでも高い精度で近似することができる[21]．従って，$J[p]$ と $J[y^*]$ との差もいくらでも小さくできる．ところが，$p(x)$ は連続な 2 階導関数をもつ許された比較関数であるから $J[p] \geqq J[y]$ が成り立つ．よってまた $J[y^*] \geqq J[y]$ である．

もしはじめから緩めた許容条件のもとでこの最小問題——あるいは，一般的には停留問題——を設定し，1 階導関数が区分的連続であることだけがわかっている解を得た場合には，この解が実際に高階導関数をもちオイラーの微分方程式を満たしているのだろうかという疑問が残る．この問いは，以下に述べるデュ・ボア-レイモン (du Bois-Reymond) の定理によって肯定的に答えられる．すなわち：

《定理》 被積分関数 $F(x, y, y')$ をもつ変分問題——F は引数については 2 階連続微分可能と仮定する——において，区分的に連続な 1 階導関数をもち，境界で 0 になる連続関数 $y(x)$ に対して，同じ連続性の条件のもとでとった第 1 変分が 0 になったとする．そのとき，もし $F_{y'y'} \neq 0$ であるならば，関数 $y(x)$ は，実は，2 階まで連続な導関数をもちオイラーの微分方程式を満たす．つまり，第 1 変分が 0 になることから 2 階導関数の存在と連続性，およびオイラーの方程式の成立が導かれるのである．□

証明に先立って次の簡単な補助定理を示さねばならない：

《定理》 $\varphi(x)$ を積分区間内で区分的に連続な関数であるとする．もし条件

---

[21] ［原註］実際，ワイエルシュトラスの近似定理によって，ε を任意に与えられた正数とするとき，区間 $x_0 \leqq x \leqq x_1$ で関数 $y^{*\prime}(x)$ との差が $\frac{\varepsilon}{2(x_1 - x_0)}$ より小さい多項式 $q'(x)$ をつくる．そうすると多項式

$$q(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} q'(t)\,dt$$

は，与えられた初期値 y_0 をとり，全区間で $y^*(x)$ と高々 $\frac{\varepsilon}{2}$ しか異ならない．与えられた終端値 y_1 をこれにとらせるには，1 次関数 $l(x) = \frac{y_1 - q(x)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ をつけ加えてさえすればよい．こうすれば $p(x) = q(x) = l(x)$ は上に述べたすべての性質を満たしている．

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\,dx = 0$$

を満たす任意の区分的に連続[22]な関数 $\eta(x)$ に対して，等式

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\eta(x)\,dx = 0$$

が成り立つならば，関数 $\varphi(x)$ は定数に等しい．□

証明の前に，定数関数 $\varphi(x)$ については確かに上の関係が成り立っていることに注目しよう．さて，与えられた φ に対して $\int_{x_0}^{x_1}(\varphi - c)\,dx = 0$ となるように定数 c を定める．そうすると，仮定した方程式 $\int_{x_0}^{x_1} \varphi\eta\,dx = 0$ とともに方程式 $\int_{x_0}^{x_1}(\varphi - c)\eta\,dx = 0$ も成り立つ．そこで $\eta = \varphi - c$ とおけば方程式 $\int_{x_0}^{x_1}(\varphi - c)^2\,dx = 0$ が得られる．定理の主張は，これから直ちに導かれる．

なお，上と全く同じ方法で，次のさらに一般的な定理を導くことができる：

《定理》 $\varphi(x)$ を区分的に連続な関数とする．条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\,dx = 0,\ \int_{x_0}^{x_1} x\eta\,dx = 0,\ \ldots,\ \int_{x_0}^{x_1} x^n\eta\,dx = 0$$

を満たすすべての区分的に連続な関数 $\eta(x)$ に対して，$\varphi(x)$ が条件 $\int_{x_0}^{x_1} \varphi\eta\,dx = 0$ を満足するならば，φ は n 次の多項式である：$\varphi = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$．□

デュ・ボア-レイモンの定理を証明するために，次のことに注目する．すなわち前と全く同様に，境界値 0 をとり，かつ区分的に連続な導関数をもつ任意の連続関数 $\zeta(x)$ に対して次の等式

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\zeta + F_{y'}\zeta')\,dx = 0, \quad \zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0$$

が成り立つとする．簡単のために $F_y = A'$, $F_{y'} = B$, $\int_{x_0}^{x_1} F_y\,dx = A$ とおけば，部分積分によって

$$\int_{x_0}^{x_1} (A'\zeta + B\zeta')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \zeta'(B - A)\,dx = 0$$

を得る．ところで関数 $\zeta' = \eta$ に着目すると，η は $\int_{x_0}^{x_1} \eta\,dx = \zeta(x_1) - \zeta(x_0) = 0$

[22] ［原註］第 2 章 p. 51 参照．

という条件を満足するが，それ以外には関数 η は区分的に連続な任意の関数である．よって，上の補助定理を適用すれば直ちに

$$B - A = F_{y'} - \int_{x_0}^{x} F_y\,dx = c. \tag{34}$$

ここで c は x に依存しない．この方程式はまずオイラーの微分方程式の代わりとみなされる．さらに $\int_{x_0}^{x_1} F_y\,dx$ が微分可能であるから，(34) から $F_{y'}$ も微分可能となり，結局オイラーの方程式

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0 \tag{34a}$$

が得られる．ところで，さらに示すべきことは，F がその引数に関して 2 回連続微分可能であって，その上にルジャンドルの仮定 $F_{y'y'} \neq 0$ を満たしているならば，区分的に連続な関数 y' が実は連続であって，連続な導関数をもつことである．実際，まず $F_{y'y'} \neq 0$ から y' は連続でかつ連続的に微分可能な関数 φ を用いて，$\varphi(x, y, F_{y'})$ と表わすことができる（陰関数の定理）．$F_{y'}$ は (34) によって x の連続関数であるから，y' についても同じことが成り立つ．その結果，φ の中の引数である y と $F_{y'}$ もまた連続微分可能となり，y' についても同じことがいえる．

前述の一般化された補助定理を適用すれば，デュ・ボア-レイモンの結果は被積分関数が $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ である場合に直ちに拡張される．詳細な議論は読者にゆだねよう．

多数の独立変数を含む変分問題の場合には事情は多少複雑になる．このときは，もし被積分関数 $F(x, y, u, u_x, u_y)$ をもつ問題で比較関数の許容範囲を，区分的に連続な 1 階導関数をもつすべての連続関数にまで拡げたとすると，たとえ第 1 変分が 0 であっても，それだけではオイラーの微分方程式の成立や，2 階導関数の存在および連続性などの定理は出てこない．しかし多次元の場合にも，デュ・ボア-レイモンの定理に類似の次のような定理（ハール (Haar) の定理）が成り立つ．すなわち：

《定理》 連続関数 u と区分的に連続な導関数 u_x, u_y を含む関数 $F(x, y, u, u_x, u_y)$ の積分に関する第 1 変分が 0 であることは，方程式

$$\iint_B F_u\,dx\,dy = \int_R (F_{u_x}dy - F_{u_y}dx) \tag{35}$$

が成り立つことと同等である．ただし左辺の積分は，領域 G 内の区分的に滑らかな曲線で囲まれた単連結な部分領域 B にわたるもの，また右辺の曲線積分は B の境界を正の向きにたどるものである．□

F が u に明示的によらない特別の場合には，ハールの定理は閉曲線 R についての右辺の積分が 0 になることを述べている．これは G のどのような単連結な部分領域においても微分方程式系

$$F_{u_x} = \Phi_y, \quad F_{u_y} = -\Phi_x$$

を満たす関数 $\Phi(x, y)$ が存在することと同等である．従って積分関係式 (35) およびすぐ上の 1 階の微分方程式系は，ここではオイラーの 2 階の微分方程式に代わるものである．

ハールの定理を証明するには，積分関係式を B が正方形である特別の場合に対して証明すれば十分である．そうすれば容易に，有限個の正方形からなる領域について成り立つことがいえる．それをもとに然るべき極限操作を行なえば，定理を任意の領域について証明することができる．そこで，座標軸に平行な辺をもつ正方形 $B : x_0 \leqq x \leqq x_1,\ y_0 \leqq y \leqq y_1$ を考えよう．この正方形 B に対する第 1 変分が 0 となる条件は

$$\iint_B (F_u \zeta + F_{u_x} \zeta_x + F_{u_y} \zeta_y)\, dx\, dy = 0$$

である．ただし ζ は B の境界で 0 であるとする．ここで変分 $\zeta(x, y)$ として特殊な形 $\zeta(x, y) = v(x)w(y)$ をしているものに限り，$v(x)$ は $x = x_0,\ x_1$ で 0，$w(y)$ は $y = y_0,\ y_1$ で 0 に等しいとすれば，方程式

$$\int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(F_u vw + F_{u_x} v'w + F_{u_y} vw'\right) dx\, dy = 0$$

が得られる．これからデュ・ボア-レイモンの定理を 2 度適用し，次のようにして求める結果を導くことができる．まず次のように記号 A, B, C を導入しよう：

$$F_{u_x} = A_y(x, y), \qquad F_{u_y} = B_x(x, y), \qquad F_u = C_{xy}(x, y),$$

$$\int_{y_0}^{y} F_{u_x}\, dy = A(x, y), \qquad \int_{x_0}^{x} F_{u_y}\, dx = B(x, y), \qquad \int_{x_0}^{x} F_u\, dx = C_y(x, y),$$

$$\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} F_u\,dx\,dy = C(x,y).$$

ついで，部分積分により

$$\int_{y_0}^{y_1} dy\left\{\int_{x_0}^{x_1}\left(-C_y v' w + A_y v' w - B v' w'\right) dy\right\} = 0,$$

あるいは

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\, v'\left\{\int_{y_0}^{y_1}\left(-C_y w + A_y w - B w'\right) dy\right\} = 0$$

が得られる．v' は境界で 0 になる任意の関数の導関数であったから，上の補助定理から

$$\int_{y_0}^{y_1}\left(-C_y w + A_y w - B w'\right) dy = c.$$

ここで c は x に依存しない．さらに部分積分を行なえば

$$\int_{y_0}^{y_1}(C - A - B) w'\, dy = c$$

が得られる．この方程式で $x = x_1$ とおいた式から $x = x_0$ とおいた式を辺々引いて得られた式をつくり，そこでさらに $C - A - B = D$ とおけば

$$\int_{y_0}^{y_1}\left[D(x_1,y) - D(x_0,y)\right] w'\, dy = 0$$

となる．デュ・ボア-レイモンの定理をもう 1 度適用すれば，被積分関数が y について定数であるから

$$D(x_1,y_1) - D(x_0,y_1) = D(x_1,y_0) - D(x_0,y_0)$$

が得られる．これは証明すべき等式

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} F_u\,dx\,dy = \int\left(F_{u_x}\,dy - F_{u_y}\,dx\right) \tag{35'}$$

に他ならない．ここで右辺の積分は長方形の境界に沿ってとる．

4.3.8　他種類の変分問題とその関数方程式

これまで考えてきた変分問題は，引数関数の微分式の積分で表わされる汎関数に関わる変分問題であった．しかし，これとは異なる，より一般的な形の

汎関数の変分問題にも出会うことがしばしばある．このような場合にも，これまでに説明してきたやり方を踏襲すると，オイラーの微分方程式に代わる関数方程式が出てくることをいくつかの例によって示そう．

(a) 表式

$$J[\varphi] = \iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt + \int \varphi(s)^2\,ds - 2\int \varphi(s)f(s)\,ds$$

を停留にすること．ここで $K(s,t)$ は与えられた連続かつ対称な s, t の関数，$f(s)$ は与えられた連続な s の関数，$\varphi(s)$ は連続な引数関数である．どの積分も与えられた区間 $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ にわたって行なう．φ を $\varphi + \varepsilon\zeta$ におきかえ，$J[\varphi + \varepsilon\zeta] = \Phi(\varepsilon)$ を ε の関数とみなせば，簡単な変形により

$$\delta J = \varepsilon \frac{d\Phi}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 2\varphi \int_a^b \zeta(t)\left[\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\,ds + \varphi(t) - f(t)\right] dt$$

が得られる．$\delta J = 0$ を要請すればオイラーの方程式として積分方程式

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\,ds + \varphi(t) - f(t) = 0$$

が得られる．これからわかるように，第3章での対称核 $K(s,t)$ をもつ積分方程式の扱いは変分問題に組み入れることもできるのである．

(b) 表式

$$J[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[p(x)\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x+1)\varphi(x-1) - \varphi^2(x) - 2\varphi(x)f(x)\right] dx$$

を停留にすること．ここで引数関数は全区間 $-\infty < x < +\infty$ で連続であり，区分的に連続な導関数をもつとする．第1変分をとれば，簡単な変形によって

$$\begin{aligned}\delta J &= \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} J[\varphi + \varepsilon\zeta]\bigg|_{\varepsilon=0} \\ &= 2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x)\left[(p\varphi')' + \varphi(x+2) + \varphi(x-2) - \varphi(x) - f(x)\right] dx\end{aligned}$$

となる．任意の ζ について第1変分が0となることを表わすオイラーの関数方程式は次の形をとる：

$$(p\varphi')' - \varphi(x+2) - \varphi(x-2) + \varphi(x) + f(x) = 0.$$

これは，微分方程式ではなく微分–差分方程式である．

4.4 オイラーの微分方程式の積分：注意と例

オイラーの方程式を積分するための体系的な理論は，ハミルトン–ヤコビ (Hamilton–Jacobi) 理論を用いて展開される[23]．ここでは，既に触れた簡単な例を解くのに役立つ注意を述べるにとどめよう．具体的には

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \text{最小}$$

という問題に話をしぼる．

関数 F が導関数 y' を全く含んでいないとすると，オイラーの方程式は $F_y = 0$ に，すなわち関数 $y(x)$ を陰関数として定義する方程式に帰着してしまう．注意すべきことは，この場合問題が常に解をもつためには境界値を任意に指定できないことである．

関数 F が従属変数 y を含んでいない場合には，直ちに $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ となり，$F_{y'} = \text{定数} = c$ が得られる．従って $y' = \varphi(x, c)$，すなわち $y = \int \varphi(x, c)\,dx$. つまりオイラー方程式の積分は求積法によって可能である．

関数 F が独立変数 x を含んでいない場合にも，積分はやはり求積法によって可能である．すなわち，このときには

$$(y'F_{y'} - F)' = y''F_{y'} + y'F'_{y'} - F_{y'}y'' - F_y y' = y'(F'_{y'} - F_y) = 0$$

がオイラーの方程式を用いて得られ，これよりさらに

$$F(y, y') - y'F_{y'}(y, y') = c$$

となる．これから y' が y と c の関数 $\varphi(x, c)$ として求められ，$x = \int \frac{dy}{\varphi(y,c)}$ のように積分できる．

ところでこの結果は，少なくとも形式的には，前の場合に帰着させることにより導くこともできる．y を独立変数，x を従属変数とみなしたときも，極値曲線はやはり積分の第 1 変分を 0 にすることに注目すればよい．y に関する微分をドット ($\dot{}$) で表わすことにすると $\int F(y, \frac{1}{\dot{x}})\dot{x}\,dy$ を極値にするという変分問題が得られる．これには従属変数は出てこない．

---

23 ［訳註］旧原著第 II 巻に収録されている．

p. 199 に挙げた例のうちで，次のものは上に述べた注意に従って積分できる．

例 (b) で $\varphi=\frac{1}{\sqrt{y}}$，すなわち $F=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$．このとき

$$y'F_{y'}-F=\frac{-1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=\text{定数}=\frac{1}{c}.$$

$y=\frac{c^2}{2}(1-\cos t)$ とおけば $y'=\sqrt{\frac{c^2-y}{y}}=\cot\frac{t}{2}$，

$$x=\int\frac{dy}{y'}=\int\tan\frac{t}{2}\frac{dy}{dt}\,dt=c^2\int\sin^2\frac{t}{2}\,dt=c_1+\frac{c^2}{2}(t-\sin t).$$

従って最速降下線は，半径 $\frac{c^2}{2}$ の円が x 軸上を転がるときに円周上の 1 点が描くサイクロイドである．

例 (c)

$$F=y\sqrt{1+y'^2},\quad y'F_{y'}-F=\frac{-y}{\sqrt{1+y'^2}}=-\frac{1}{c},$$

$$y=\frac{1}{c}\cosh(cx+c_1).$$

与えられた 2 つの円を連結する回転曲面のうちで面積最小のものは，懸垂線をその軸のまわりに回転してできるものである．

例 (d)

$$F=y\sqrt{1-\dot{y}^2},\quad \dot{y}F_{\dot{y}}-F=\frac{-y}{\sqrt{1-\dot{y}^2}}=\frac{-1}{c},$$

$$y=\frac{1}{c}\sin(cs+c_1).$$

もう一方の座標 x は

$$x=\int\sqrt{1-\dot{y}^2}\,ds=\int\sin(cs+c_1)\,ds=-\frac{1}{c}\cos(cs+c_1)+c_2.$$

これより，等周問題の解は円のみである．

4.5　境界条件

これまでの議論ではいつでも，決定すべき関数は積分領域の境界で指定さ

れた値をとるものと仮定していた．しかし多くの問題では，そのような条件が全くなかったり，あるいは別種の条件が課せられていたりする．**固定した基本領域で関数を決定する問題において，境界での条件が全く課されていない場合にはそれを自由境界と呼ぶ**．そのような自由境界とは別に，曲線や曲面を決める幾何学的な問題では，求める曲線が指定された曲線や曲面上のどこかで始まり，どこかで終わるとか，求める面分の縁が指定された曲面上のどこにあるべしとか，といった問題が現れる．このような問題では，独立変数の積分領域は変分問題の中に初めから与えられているわけではなく，むしろ問題の一部として決めていかなくてはならない．しかし，これらの問題はいずれも既に得られた結果を少々一般化することで扱える．すなわち，積分 J の第 1 変分 δJ の扱いにおいて，関数の変分を初めから境界で 0 と限らずに，与えられた条件に合わせて処理するのである．

4.5.1 自由境界における自然境界条件

積分 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ の変分問題で，引数関数 $y(x)$ に対して端点 $x = x_0, x = x_1$ で何の条件もついていない場合には，解の停留性の必要条件は第 1 変分

$$\delta J = F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta y\,dx$$

が 0 になることからすぐに得られる（p. 199, (15) 参照）．まずオイラーの方程式 $[F]_y = 0$ が満たされているべきことは明らかである．なぜなら，この変分問題の解である停留関数と境界値が一致する，すなわち境界で $\delta y = 0$ を満たす限られた範囲の関数の中だけで変分を考えたとしても停留性は保たれているはずだからである．従って，条件 $\delta J = 0$ の中でさらに考慮するべきものは境界に関わる項だけである．境界で δy が任意であることから，必要条件として「自然境界条件」

$$x = x_0 \text{ および } x = x_1 \text{ のとき } F_{y'} = 0$$

が得られる．

同様にして，第 1 変分の表式（p. 200, 202, 203 参照）から，次の各積分

$$(36)\qquad \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,\ldots,y',z',\ldots)\,dx,$$

$$(37)\qquad \iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy,$$

$$(38)\qquad \iint_G F(x,y,u,u_x,u_y,v,v_x,v_y,\ldots)\,dx\,dy$$

に関して，それぞれの停留性の必要条件として，オイラーの微分方程式に加えて自然境界条件

$$x=x_0,\ x=x_1\ \text{で}\ F_{y'}=0,\ F_{z'}=0,$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}=0,$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}=0,\quad F_{v_x}\frac{dy}{ds}-F_{v_y}\frac{dx}{ds}=0,\ \ldots$$

が導かれる．ただしあとの2行の条件については，領域 G の境界 Γ（弧長を s とする）の上で成り立つ．

自然境界条件の概念はもっと一般的なタイプの変分問題，なかでも境界値が明示的に現れる問題，に容易に応用できるという点で特に格別な意味をもっている．次の例はその重要な例を与えている．

$$(39)\quad J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx-\varphi(y_0)+\psi(y_1),\quad y_0=y(0),\ y_1=y(1),$$

あるいは

$$(40)\quad J=\iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy+\int_\Gamma \Phi(s,u,u_s)\,ds\quad \left(u_s=\frac{du}{ds}\right).$$

それぞれの変分は，

$$(41)\qquad \begin{cases} \delta J=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\delta y\,dx+\bigl[\psi'(y_1)+F_{y'}(x_1,y(x_1),y'(x_1))\bigr]\delta y_1 \\ \qquad\qquad -\bigl[\varphi'(y_0)+F_{y'}(x_0,y(x_0),y'(x_0))\bigr]\delta y_0 \end{cases}$$

および

$$(42)\qquad \delta J=\iint_G[F]_u\delta u\,dx\,dy+\int_\Gamma\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}+[\Phi]_u\right)\delta u\,ds.$$

ただし

$$[\Phi]_u = \Phi_u - \frac{d}{ds}\Phi_{u_s}. \tag{43}$$

対応する自然境界条件は

$$F_{y'} + \varphi'(y)|_{x_0} = 0, \qquad F_{y'} + \psi'(y)|_{x_1} = 0,$$
$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} + \Phi_u - \frac{d}{ds}\Phi_{u_s} = 0$$

である[24]．特別の場合として

$$J = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy + \int_\Gamma \sigma u^2\,ds \tag{44}$$

を考えよう．境界関数 $\sigma(s)$ が連続であるとすれば，変分の表式は

$$\delta J = -2\iint_G (u_{xx} + u_{yy})\delta u\,dx\,dy + 2\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\delta u\,ds \tag{45}$$

となる．$\frac{\partial}{\partial n}$ は Γ の外向法線方向の微分を表わす．もう少し一般の形の積分

$$J = \iint_G \left(p(u_x^2 + u_y^2) - qu^2\right)dx\,dy + \int_\Gamma p\sigma u^2\,ds \tag{44'}$$

（ただし $p(x,y)$ は 1 階導関数とともに G 内で連続，$q(x,y)$ は G 内で連続，$\sigma(s)$ は Γ 上で連続である）の場合も同様に

(45′)

$$\delta J = -2\iint_G \left((pu_x)_x + (pu_y)_y + qu\right)\delta u\,dx\,dy + 2\int_\Gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\delta u\,ds$$

が得られる．

積分 (39) と (41) で特に

$$\varphi(y) = l(y-a)^2, \quad \psi(y) = l(y-b)^2$$

とおけば，自然境界条件は

$$\frac{1}{2l}F_{y'}|_{x_0} + y_0 - a = 0, \quad \frac{1}{2l}F_{y'}|_{x_1} + y_1 - b = 0$$

となる．ここで $l \to \infty$ の極限移行を行なえば，固定境界条件

$$y_0 = a, \quad y_1 = b$$

---

24 ［原註］記号 $|_{x_0}$ はその前にある式の中で $x = x_0$ とおく，という意味である．

が得られる．こうして，**固定境界の変分問題は自由境界の問題の極限の場合とみなせる**．

一般に，境界項や境界積分[25]をつけ加えることによって，オイラーの微分方程式は変えずに自然境界条件を然るべく変化させる手段が得られるのである．

4.5.2　幾何学的問題・横断性

幾何学的な問題の取り扱いでは，たとえば，求める曲線の端点が与えられた曲線上または曲面上を動き得るような場合[26]，一般的にいえば積分領域の境界が固定されていない場合を扱うためには，パラメータ表示を用いるのが最も適している．ここでは，決めるべき平面曲線 $y(x)$ の終点は固定点ではあるが，始点は与えられた曲線 $T(x, y) = 0$ の上にあるという場合に対し，極値が得られるための境界条件を導こう．極値にするべき積分 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ において，下端 x_0 はまだ定まっていないのであるが，固定した区間 $t_0 \leqq t \leqq t_1$ を動くパラメータ t を用いてパラメータ表示 $x = x(t)$, $y = y(t)$ を導入する．こうすれば積分領域が一定していないという不便を除くことができる．実際，積分は $J = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt$, $\mathcal{F} = \dot{x}F\bigl(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\bigr)$，初期条件は $T(x(t_0), y(t_0)) = 0$ となり，$x(t_1)$ と $y(t_1)$ はあらかじめ与えられた値をとる．そこで，$t = t_1$ で 0 となる以外には任意であるような 2 個の関数 $\xi(t)$, $\eta(t)$ と 2 個のパラメータ ε_1, ε_2 を導入して，それらは条件

$$\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = T\bigl[x(t_0) + \varepsilon_1\xi(t_0),\ y(t_0) + \varepsilon_2\eta(t_0)\bigr] = 0$$

を満たすものとする．そうして，求める曲線の極値性を次のように定式化する：条件 $\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ のもとで関数

---

25 ［原註］境界積分をつけ加える代わりに，基本領域にわたる積分の中に発散表現を加えることもできる．(p. 209 と p. 268 の脚注 46 を参照.)

26 ［原註］いま扱ったばかりの「自由」境界はもちろんこれの特別の場合とみられる．たとえば

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = \text{最小}$$

という問題で $y(x_0)$ と $y(x_1)$ は任意でよい，というのは次のように表現することもできる：端点が鉛直線 $x = x_0$ および $x = x_1$ の上にあって上記の積分の値ができる限り小さな値をとるような曲線を求めよ．

$$\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{F}(x+\varepsilon_1\xi, y+\varepsilon_2\eta, \dot{x}+\varepsilon_1\dot{\xi}, \dot{y}+\varepsilon_2\dot{\eta})\,dt$$

が $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ のときに停留値をとるとすると，通常の付加条件のもとでの極値の理論によれば，同時には 0 となることのない定数 λ_0, λ が存在し

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}(\lambda\Psi+\lambda_0\Phi)\bigg|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}(\lambda\Psi+\lambda_0\Phi)\bigg|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0$$

が成り立つ．$t=t_0$ で $\frac{\partial T}{\partial x}=0$, $\frac{\partial T}{\partial y}=0$ であるという特異な場合は除外しよう．すると，上記の定数 λ_0 は 1 に等しくとってよい．関数 $x(t)$, $y(t)$ はオイラーの微分方程式を満足しなくてはならないから，第 1 変分の表式により，$t=t_0$ において方程式

$$\xi(\lambda T_x-\mathcal{F}_{\dot{x}})=0,\quad \eta(\lambda T_y-\mathcal{F}_{\dot{y}})=0$$

の成り立つべきことがわかる．これから λ を消去すれば**横断性条件**

(46) $$\mathcal{F}_{\dot{x}}T_y-\mathcal{F}_{\dot{y}}T_x=0$$

が導かれる．終点が曲線上を動く場合について，対応する同様な条件が終点でも当然成り立つ．

横断性条件は決定すべき極値曲線の方向と境界曲線の方向の間の相互的な関係である．これは T_x と T_y について線形である．従って出発点での極値曲線の方向を与えれば，そこでの境界曲線の方向はそれから一意的に決まる．（しかしその逆は必ずしも成り立つとは限らない．）**与えられた出発曲線に対して，横断性をもつ 1-パラメータの極値関数（極値曲線）の族を構成することができる．すなわち，出発曲線の各点を通って横断性の方向へ出て行くオイラーの微分方程式の解曲線を引くことによってである．**

再び曲線の非同次な表示 $y=f(x)$ に戻ると

(47) $$\mathcal{F}_{\dot{x}}=F-\frac{\dot{y}}{\dot{x}}F_{y'}=F-y'F_{y'},\quad \mathcal{F}_{\dot{y}}=F_{y'}$$

であるから，横断性条件は

(48) $$(F-y'F_{y'})T_y-F_{y'}T_x=0$$

の形に，あるいは，出発曲線が $y=g(x)$ の形に与えられているなら

$$F + (g' - y')F_{y'} = 0$$

となる．ただし注意すべきは，出発曲線の接線の方向が，考えている点で y 軸に平行なときには，最後の式は意味を失うことである．そうなった場合には，(47) からわかるように，自然境界条件 $F_{y'} = 0$ がその役割を果す．

さて，与えられた空間曲面 $T(x, y, z) = 0$ から出発して与えられた終点 x_1, y_1, z_1 に達する空間曲線のうちで，積分 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$ を停留にする曲線 $y = y(x)$, $z = z(x)$ を決定する，という場合も事情は全く同様である．すなわち，前と同じくパラメータ表示を導入して $F\big(x, y, z, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \frac{\dot{z}}{\dot{x}}\big)\dot{x} = \mathcal{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ とおくと，出発曲面上での横断性条件は次の2つの方程式の形で得られる：

$$T_x : T_y : T_z = \mathcal{F}_{\dot{x}} : \mathcal{F}_{\dot{y}} : \mathcal{F}_{\dot{z}}, \tag{49}$$

あるいは非同次の表示では

$$T_x : T_y : T_z = (F - y'F_{y'} - z'\mathcal{F}_{z'}) : F_{y'} : F_{z'}. \tag{50}$$

これらの条件によってもまた，出発曲面 $T = 0$ の各点に対して1つまたはそれより多くの横断方向が対応して，その結果この曲面は2-パラメータの極値曲線族を与えることになる．他方，どの極値線方向にもそれぞれただ1つだけの横断性の曲面の方向が対応する．

終点の位置が与えられた面上を動き得る場合も，この面の終点では同じ横断性条件が成り立つことはもちろんである．

曲面上の測地線，あるいは空間内の最短曲線の場合には，横断性と直交性の概念は一致する．たとえば $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ に対し，横断性条件は $T_x : T_y : T_z = 1 : y' : z'$ である．また $F = \sqrt{e + 2fy' + gy'^2}$ については

$$T_x : T_y = (e + fy') : (f + gy')$$

である．これらは「垂直交叉」の条件である．

従って，1つの曲面上で1点 P から測地線の束を引くと，この曲線束は直交截線群と横断性条件を満たしながら交わる．その交点を Q とすると，測地線上の点 P から Q までの長さは Q の関数として，Q が直交截線上にあっても停留である．このことから，この長さが定数であって，直交截線がいわゆ

る測地円という閉曲線であることがいえる.

極値線と横断線の関係は旧原著第 II 巻でより詳しく述べているが，ここでは差しあたって，**光の伝播の場合には，横断線は光線（極値線）が広がって行く光波の波面に他ならない**ということだけを記しておく．ただし横断線（横断面）とは，いたる所で極値曲線族に横断性条件を満たしながら交わる曲線（曲面）のことを指している．**もし横断性と直交性が異なる場合には，波面の法線と光線の方向とは一致しないことになる.**

4.6　第 2 変分とルジャンドル条件

オイラーの微分方程式は極値となるための必要条件を与えるだけである．与えられた境界条件を満足する特定の関数が本当に極値を与える関数であるためには，付加的な不等式の形をもつ必要条件をさらに満たすべきことがわかるのである．そのような不等式を導くこと，およびそれを十分条件にまで精密化することが古典的変分法の重要な主題の 1 つである．しかしながら，その考察を行なうのは下巻でのことにして，ここでは，第一歩を記すだけ，すなわち次の最も簡単な問題に対してルジャンドルの判定条件を紹介するだけにする．

《ルジャンドルの条件》 もし積分

$$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')\, dx$$

の値を停留にする関数 $\varphi = u(x)$ が区分的連続な 1 階導関数をもつ連続な比較関数（許容関数）$\varphi(x)$ に対してこの積分の値を極小にするならば，この停留関数に沿っていたる所で条件

$$F_{\varphi'\varphi'}(x, u, u') \geqq 0$$

が満たされることが必要である．□

証明するためには，積分式

$$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')\, dx$$

をテイラーの定理

$$J[\varphi+\varepsilon\eta]=J[\varphi]+\varepsilon J_1[\varphi,\eta]+\frac{\varepsilon^2}{2}J_2[\bar{\varphi},\eta]$$

を用いて展開する．ここで

$$J_1[\varphi,\eta]=\int_{x_0}^{x_1}(F_\varphi\eta+F_{\varphi'}\eta')\,dx,$$
$$J_2[\bar{\varphi},\eta]=\int_{x_0}^{x_1}(\bar{F}_{\varphi\varphi}\eta^2+2\bar{F}_{\varphi\varphi'}\eta\eta'+\bar{F}_{\varphi'\varphi'}\eta'^2)\,dx.$$

ただし $F_{\varphi\varphi}$, $F_{\varphi\varphi'}$, $F_{\varphi'\varphi'}$ の上に引かれた横線は，表式の中の引数 φ, φ' を $\bar{\varphi}=\varphi+\rho\eta$, $\bar{\varphi}'=\varphi'+\rho\eta'$（$\rho$ は 0 と ε の間のある数）でおきかえたものを意味する．J は $\varphi=u$ のとき停留であるから $J_1[u,\eta]$ は 0 である．それゆえ極小となるための必要条件は明らかに，任意に選んだ η に対して $J_2[\bar{\varphi},\eta]\geqq 0$ が成立することである．

もし $J_2[\bar{\varphi},\eta]$ の中でパラメータ ε を 0 に近づければ J_2 は積分

$$J_2[\varphi,\eta]=\int_{x_0}^{x_1}(F_{\varphi\varphi}\eta^2+2F_{\varphi\varphi'}\eta\eta'+F_{\varphi'\varphi'}\eta'^2)\,dx$$

に収束する．従って，極値関数 u に対する必要条件として

$$J_2[u,\eta]\geqq 0$$

が得られる．そこで J の**第 2 変分** $\delta^2 J$ を

$$\delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}J_2[u,\eta]$$

と定義すれば，上の条件は

$$\delta^2 J\geqq 0$$

となる．

この積分条件から，η の任意性を使って点 x についての上述のルジャンドルの微分条件を得ることができる．それには η として，点 $x=\alpha$ の近傍のみで 0 と異なる次の区分的線形の関数（グラフが折線となる関数）

$$\eta=\sqrt{\sigma}\left(1+\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)\quad(\alpha-\sigma\leqq x\leqq\alpha),$$
$$\eta=\sqrt{\sigma}\left(1-\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)\quad(\alpha\leqq x\leqq\alpha+\sigma),$$

$$\eta = 0 \quad (\text{それ以外の } x \text{ に対して})$$

を選ぶ.

そうすると積分 $J_2[u,\eta]$ は区間 $\alpha - \sigma \leqq x \leqq \alpha + \sigma$ の上だけでの積分に帰着し，この区間では $\eta'^2 = \frac{1}{\sigma}$ である．そこで σ を 0 に近づければ，積分の最初の 2 項は 0 に近づくが，第 3 項の極限は点 $x = \alpha$ における $2F_{\varphi'\varphi'}$ の値になる．こうしてこの値は非負であることが示され，ルジャンドル条件の必要性が得られた.

未知関数が $\varphi, \psi, \ldots$ のようにいくつもある場合には，対応するルジャンドル条件は，次の形になる．すなわち正方形の係数行列

$$\begin{pmatrix} F_{\varphi'\varphi'} & F_{\varphi'\psi'} & \cdots \\ F_{\psi'\varphi'} & F_{\psi'\psi'} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

が定める 2 次形式が負の値をとらないこと，いいかえれば正定値でなければならないことである.

不等号 $\geqq$ をもつ上記の形のルジャンドル条件ではなく，より厳しい形のルジャンドル条件

$$F_{\varphi'\varphi'} > 0$$

もしばしば用いられる．もしこの条件が停留関数 $\varphi = u$ に対して満たされるだけでなく，基礎領域からの x の任意の値に対し，また，然るべく与えられた領域における u の任意の値に対しても，さらには全く任意の u' の値に対して成立している場合[27]には，**強いルジャンドル条件**と呼ぶ.

この条件に加えて，もしさらに一層制約的な不等式

$$F_{\varphi'\varphi'}F_{\varphi\varphi} - F_{\varphi\varphi'}^2 \geqq 0$$

が，与えられた領域内のすべての u と x に，さらに任意の u' に対して成り立つならば，J_2 の被積分関数の 2 次形式は正定値となり，従って，与えられた領域におさまる停留関数は確実に極小を実現する．この単純であるが極め

[27]［訳註］x, u, u' に対する記述は関数空間における停留関数 $\varphi = u$ の近傍に言及している.

て粗い**十分性の判定条件**については，旧原著第 II 巻でその精密化が図られている．

4.7　付帯条件のついた変分問題

これまで扱ってきた問題では，引数関数（比較関数）には境界条件を除けば制限はなく，従って，変分問題の解はオイラーの微分方程式の与えられた境界条件，あるいは，自然境界条件のもとで解として定め得るのであった．この節で考察するのは，引数関数に対し境界条件とは別種の付帯条件が課せられる問題である．この条件とは引数関数の，全領域にわたる振舞いに関わるものであるため，オイラーの微分方程式自身に本質的な変更が加えられる．

4.7.1　等周問題

このような問題の簡単な例は，一般の等周問題であるが，それは §4.1.3 (d) で扱ったように次のように述べられる：積分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

を停留にせよ．ただし，関数 y は境界条件 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$，および c を定数として付帯条件

$$K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx = c \tag{51}$$

を満たすとする．

この問題を解くために次の方策をとる：まず，境界値 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ が与えられているとし，関数 $y = y(x)$ が求める停留関数であるとする．次に，$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ をパラメータ，$\eta(x), \zeta(x)$ は条件 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = \zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0$ 以外は任意な関数を表わすとして，近接した曲線の族 $y+\delta y = y(x)+\varepsilon_1\eta(x)+\varepsilon_2\zeta(x)$ を考察する．そうすると，関数

$$\varPhi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1\eta + \varepsilon_2\zeta, y' + \varepsilon_1\eta' + \varepsilon_2\zeta')\, dx$$

は

$$\Psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx=c$$

を満たす，絶対値において十分小さいすべての ε_1 と ε_2 と比較して，$\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ において停留とならなければならない．§4.1 で引用した，通常の極大・極小に関する定理によれば，同時には 0 にはならない 2 個の定数 λ_0 と λ が存在して

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\left[\lambda_0\int_{x_0}^{x_1} F(x,y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx\right.$$
$$\left.+\lambda\int_{x_0}^{x_1} G(x,y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx\right]\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}\left[\lambda_0\int_{x_0}^{x_1} F(x,y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx\right.$$
$$\left.+\lambda\int_{x_0}^{x_1} G(x,y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')\,dx\right]\Bigg|_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}}=0$$

が成り立つ．すなわち

$$\int_{x_0}^{x_1}\bigl\{\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y\bigr\}\eta\,dx=0,$$
$$\int_{x_0}^{x_1}\bigl\{\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y\bigr\}\zeta\,dx=0.$$

第 1 の式から定数 λ_0 と λ の比は ζ によらないことがいえる．ζ は任意であることより第 2 の式から $\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y=0$ が出る．$\lambda_0\neq 0$ のとき，すなわち

(52) $$(G_{y'})'-G_y=0$$

が成り立たない場合[28]には，$\lambda_0=1$ とおくことができて

(53) $$\frac{d}{dx}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'}-\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}=0$$

が成り立つ．

こうして次の結果が得られた：

---

[28] ［原註］容易にわかるように，与えられた付帯条件を満たす関数が 1 個しかないときにはいつもこの等式が満たされる．

《定理》 方程式 (52) が成り立つ例外的な場合を除けば，考察している付帯条件付きの変分問題のオイラーの方程式は，あとでその値が定まるパラメータ λ を用い，被積分関数を $F^* = F + \lambda G$ とする変分問題を立て，付帯条件のことを忘れて（考慮することなしに）そのオイラーの方程式を導けばよい．□

微分方程式 (53) の一般解は 2 個の積分定数のほかにパラメータ λ を含んでいる．これら 3 個のパラメータは境界条件および方程式 $K = c$ を用いて決めることになる．

最も簡単な例として，$F = \sqrt{1+y'^2}$, $G = y$ とした通常の等周問題をとることができる．容易な計算により

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(\sqrt{1+y'^2} + \lambda y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{1+y'^2} + \lambda y) = 0$$

が得られ，さらに

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \lambda$$

となる．これから円弧をグラフとする極値関数が得られるのである．

続いての例は，両端で吊り下げられた一様な重みをもつ**紐の平衡位置に関する問題**である．この場合は $F = y\sqrt{1+y'^2}$, $G = \sqrt{1+y'^2}$ である．$F_x = 0$ のときのオイラーの微分方程式の積分の仕方を思い出しながら扱えば（p. 220 参照）

$$F^* - y'F^*_{y'} = (y+\lambda)\left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

$$y + \lambda = c\cosh\left(\frac{x}{c} + c_1\right)$$

が得られる．すなわち，求める曲線は**懸垂線**である．

例外的な場合の説明の例として，付帯条件 $\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx = 1$, $y(0) = y(1) = 0$ を考察しよう．明らかに $y = 0$ が唯一の引数関数であって，実際に方程式 (52) を満たしている．F が何であろうと解は $y = 0$ 以外にはあり得ない[29]．

---

[29] ［原註］例外的な場合の研究については Carathéodory, C.: Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung. Dissertation Göttingen 1904, p. 45 以降を見よ．

4.7.2 有限な付帯条件

付帯条件付きの変分問題のうちで，次に簡単なタイプは以下のものである：積分 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$ を停留にする問題において，引数関数 $y(x)$, $z(x)$ に対して境界条件 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$ のほかに

$$G(x, y, z) = 0 \tag{54}$$

という形の付帯条件をつける．幾何学的にいえば，ある与えられた曲面に含まれる空間曲線 $y(x)$, $z(x)$ を停留性の要求によって定めようというのである[30]．

関数 $y(x)$ と $z(x)$ に対する必要条件を導出するための自然な方法は，方程式 $G(x, y, z) = 0$ を一方の関数，たとえば $z(x)$ について解くことによって，この問題を 1 個の独立な関数 $y(x)$ を決定する問題に帰着させることである．$z = g(x, y)$ と解くことは，解析学の初等的な定理によって，考慮するべき停留曲線の上で $\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ であれば確かに可能である．そうすれば z' も x, y, y' の関数とみなせるから関係式 $G_x + y'G_y + z'G_z = 0$ または $z' = y'\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}$ に注意して $F(x, y, z, y', z')$ から z' を消去することができる．その結果は

$$F(x, y, z, y', z') = F\left(x, y, g(x, y), y', \frac{\partial g}{\partial x} + y'\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

であって，y はオイラーの微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'} + F_{z'}\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \left[F_y + F_z\frac{\partial g}{\partial y} + F_{z'}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y'\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right] = 0$$

を満たさなければならない．この式は容易に次の形に変形できる：

$$(F'_{y'} - F_y) + (F'_{z'} - F_z)\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

一方

$$G_y + G_z\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

であるから，比例式

---

30 ［原註］座標 x を特別扱いしていることに注意．そのため曲面 $G = 0$ の上のすべての曲線が許容されているわけではない．

$$(F'_{y'} - F_y) : (F'_{z'} - F_z) = G_y : G_z$$

が成り立つ．従って停留曲線に沿って恒等的に $G_y = G_z = 0$ となる（これは上に設けた仮定に反する）か，または比例因子 $\lambda = \lambda(x)$ が存在して

$$F'_{y'} - F_y + \lambda G_y = 0, \quad F'_{z'} - F_z + \lambda G_z = 0 \tag{55}$$

が成り立つ．もし $F^* = F + \lambda G$ とおけば，上の結果を F^* に対するオイラーの方程式

$$-[F^*]_y = F^{*\prime}_{y'} - F^*_y = 0, \quad -[F^*]_z = F^{*\prime}_{z'} - F^*_z = 0$$

の形に書くことができる．

これらの方程式は，（例外的でない場合に）極値が起こるための必要条件である．一方，方程式

$$\boldsymbol{G_y = 0, \quad G_z = 0}$$

が成り立つような例外的な場合には，関係式 $\boldsymbol{G_x + y'G_y + z'G_z = 0}$ によって第3の方程式 $\boldsymbol{G_x = 0}$ も成り立つことになる．

ここや前の例で導入された因数 λ を，微分法における同様な考察での習慣に合わせて，**オイラーまたはラグランジュの乗数**[31]と呼ぶ．§4.7.1, §4.7.2 における問題の扱い方には形式的な共通性がある．すなわち，**どちらについても乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて $\boldsymbol{F^* = F + \lambda G}$ という表式を構成し，$\boldsymbol{F^*}$ に対するオイラーの方程式を導くのである．違いが次の点である．すなわち第1の場合には $\boldsymbol{\lambda}$ は定数であるのに対し第2の場合には $\boldsymbol{x}$ の関数 $\boldsymbol{\lambda(x)}$ である．オイラーの方程式に付帯条件と境界条件の両方を合わせることによって，停留関数を定めるためにまさに必要な個数の条件を与えているのである．**

付帯条件として最後に扱った場合の最も簡単な例として，**与えられた曲面 $\boldsymbol{G(x,y,z) = 0}$ 上の測地線の決定**を取り上げよう．ここでは $F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ であって，測地線がパラメータ表示 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ で与えられるものとすれば，比例式

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} : \frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} : \frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = G_x : G_y : G_z,$$

31 ［訳註］multiplier（英）．

あるいは，3 つの方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda G_x=0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda G_y=0,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda G_z=0$$

が得られる．これら 3 つの方程式に加えての第 4 の方程式 $G=0$ から，測地線と乗数 $\lambda(x)$ が決定される．この表示法は，以前のものに比較して，測地線の最も重要な幾何学的性質，たとえば測地線の接触平面が曲面の法線を含むということを示すのに便利な形であるという長所をもっている．このことの証明は読者にまかせたい．

4.7.3 付帯条件としての微分方程式

これまで扱ったタイプの問題は，乗数 λ は本質的には，形式的に優雅な計算技法としての役目を果たしただけであった．しかし，付帯条件がもっと一般の

(56) $$G(x,y,z,y',z')=0$$

という形の場合，そうしてこの G がある関数 $H(x,y,z)$ を x で微分した形に表わせないとき，すなわち，**積分不能の微分方程式**である場合には，乗数は本質的に不可欠な役割を果たす．なおこのような付帯条件は，**非ホロノームな条件**と呼ばれる．

非ホロノームな条件の簡単な例は $y'-z=0$ である．もし仮に，この条件がホロノームであるとすると，すなわち有限条件 $H(x,y,z)=$ 定数と同値であると仮定すると，x, y, z の値をいたる所で独立に選ぶということはできない．しかし条件 $y'-z=0$ の場合には，x, y, z の値のあらゆる組に対してさらに $y'-z=0$ が成り立つように y' を選ぶことが明らかに可能である．非ホロノームな条件は，力学では束縛条件が位置座標だけでなく運動方向をも含む場合には，たとえば船の運動，スケート靴の運動，あるいは球の転がり

運動などに現れる．

前に扱った付帯条件付きの問題は，いま述べた一般の問題の特別な場合とみなすことができる．このことは §4.7.2 の問題については自明である．しかし等周問題もこの部類に入れることができる．これを了解するには，F の中には z と z' は全然現れないが，付帯条件として $z' - G(x, y, y') = 0$ が課されているとみなし，かつ，境界条件として

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = 0, \quad z(x_1) = c$$

を採用するのである．

積分記号内に高階導関数を含む通常の極小問題も，いま考えている問題の特別の場合である．たとえば，$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\,dx$ の極値問題は，付帯条件 $z - y' = 0$ のもとでの $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z')\,dx$ の極値問題と同等である．

これら特別の場合のすべてについて，容易に見通せることは，必要条件が総括的に次のような規則によって得られることである．

《定理》 もし解が関数 G に対応するオイラーの方程式を満足しないときには，関数 $F^* = F + \lambda G$ に対応するオイラーの方程式が満たされるような乗数 $\lambda(x)$ が存在する．□

この乗数の法則は，上で述べた一般の問題に対してもやはり成り立つ． 証明を行なうことは割愛しよう．関心のある読者は文献を参照して欲しい[32]．

最後に，ここで述べた論法と結果は，未知関数の個数や付帯条件の個数が増えてもすべて成り立つことを強調しておこう．多変数の関数に対してもいま述べた結果は同様に成り立つと考えられるが，付帯条件が偏微分方程式の場合には一般的な証明はまだなされていない．

---

[32] ［原註］Hilbert, D.: Zur Variationsrechnung, Math. Ann. Bd. 62, pp. 351–370, 1906 を見よ．詳しい解説は Bolza & Hadamard の p. 233.

4.8　オイラーの微分方程式の不変性

4.8.1　関数空間における勾配としてのオイラーの式 ——オイラーの式の不変性

普通の関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ の 1 点における停留性は，その点において方程式

$$\operatorname{grad} f = 0$$

が成立することと同値である．ここで $\operatorname{grad} f$ は関数 f の勾配，すなわち f_{x_1}, f_{x_2}, …, f_{x_n} を成分とする n 成分のベクトルを表わす．この勾配ベクトルは次のような特徴的な性質をもつ：もし n 個の変数 x_1, x_2, …, x_n のすべてが，あるパラメータ t の可微分関数ならば，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は t の関数となるが，そのとき

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i f_{x_i} = \mathbf{v} \operatorname{grad} f \tag{57}$$

が成り立つ．上の式で，ドット（˙）は t による微分を表わし，$\mathbf{v}$ は $\dot{x}_i$ を成分とする**移動ベクトル**[33]である．つまり関数の変化の速さは，引数が表わす動点の移動ベクトルと勾配ベクトルの内積に等しい．

さて，オイラーの微分表式は，それが 0 となることによって汎関数の停留性を特徴づけるものであったが，その表式自身が**関数空間における勾配**と類似のものとみなすことができるのである．

たとえば，積分

$$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')\, dx$$

の場合に，引数関数 φ は独立変数 x だけでなくパラメータ t にも依存すると仮定してみよう．そうすると $J[\varphi] = J(t)$ は t の関数になるので，もし区間の境界で φ の値がパラメータ t と無関係に固定されているならば，第 1 変分の式から

$$\dot{J}(t) = \int_{x_0}^{x_1} \dot{\varphi}(x) [F]_\varphi \, dx$$

33　［訳注］$\mathbf{x}$ を動点とみなせば，$\mathbf{v}$ はその速度ベクトルである．

となる．ドット（˙）はここでも t に関する微分を表わす．この公式は，関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対する公式 (57) と完全に類似している．この類似性を，表式 $[F]_\varphi$ とは関数空間における $J[\varphi]$ の勾配であると表現しておこう．

全く一般の場合に戻り，**汎関数 $J[\varphi]$ の勾配を次のような表式 $G[\varphi]$ であると定義する．すなわち，φ を独立変数 x 以外のパラメータ t にも依存する関数の族から選んで代入するとしたとき，常に**

$$\frac{d}{dt}J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} \dot{\varphi} G[\varphi]\, dx$$

という式が成り立つような $G[\varphi]$ を意味するのである．

たとえば，対称性の条件 $K(x,y) = K(y,x)$ のもとでは，表式 $2\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy$ が汎関数 $\int_0^1\int_0^1 K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy$ の勾配である．

関数の勾配は独立変数の変換に際してよく知られた不変性[34]をもっている．それに対応して，オイラーの微分表式は，積分に登場する関数の変数が新しい独立変数に変換される際に，類似した不変性（あるいはむしろ共変性）を示す．以下において，この不変性を変換則を通して定式化することにしよう．

上で扱った最も簡単な場合において，x を新しい変数 $\xi(x)$ に変換し，かつ

$$F(x, y, y') = F\left(x(\xi), y, \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}}\right) = \Phi\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right)$$

とおけば

$$\int_{x_0}^{x_1} F\, dx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi \frac{dx}{d\xi}\, d\xi$$

であるから

$$(58)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} [F]_y \eta\, dx = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\, dx\bigg|_{\varepsilon=0} \\ \displaystyle\qquad = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi\left(\xi, y+\varepsilon\eta, \frac{dy}{d\xi}+\varepsilon\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}\, d\xi\bigg|_{\varepsilon=0} \\ \displaystyle\qquad = \int_{\xi_0}^{\xi_1}\left[\Phi\frac{dx}{d\xi}\right]_y \eta\, d\xi \end{cases}$$

---

34 ［訳註］変数変換に対する，いわゆる鎖率 (chain rule) をまとめて書いた変換則のことを意味している．

となる．これから，η の任意性（ただし境界では 0 であることを除いての任意性）により

$$[F]_y = \frac{d\xi}{dx}\left[\Phi \frac{dx}{d\xi}\right]_y \tag{59}$$

となる．

独立変数が 2 個の場合も同様である．すなわち

$$\begin{aligned} F(x, y, u, u_x, u_y) &= F\big(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u, u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y\big) \\ &= \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \end{aligned}$$

$$\iint_G F\,dx\,dy = \iint_G \Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\iint_G [F]_u \zeta\,dx\,dy = \iint_G \left[\Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right]_u \zeta\,d\xi\,d\eta,$$

$$[F]_u = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\left[\Phi \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right]_u. \tag{60}$$

独立変数が 2 個より多い場合にも全く同様に，オイラーの表式は変換される．

上で導いた公式における不変性は，オイラーの微分形式を新しい変数に変換する際に，形式的な見通しのよさを与えるだけでなく，計算の労を大いに減らしてくれるものである．実際，2 次導関数の変換にわずらわされなくてすむのであるから．

4.8.2 Δu の変換・極座標での表示

重要な例として被積分関数が $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ の場合を考察しよう．変換 $x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ によって線要素の 2 乗 $dx^2 + dy^2 + dz^2$ が $\sum_{i,k} g_{ik}\,d\xi_i\,d\xi_k$，ただし

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial \xi_i}\frac{\partial x}{\partial \xi_k} + \frac{\partial y}{\partial \xi_i}\frac{\partial y}{\partial \xi_k} + \frac{\partial z}{\partial \xi_i}\frac{\partial z}{\partial \xi_k}$$

に変換されたとする．これらの量の行列式 $a = |g_{ik}|$ は ξ_1, ξ_2, ξ_3 に関する x, y, z の関数行列式の 2 乗である．簡単な計算でわかるように

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \sum_{i,k} g^{ik} u_i u_k \qquad \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial \xi_i}\right),$$

ただし g^{ik} は

$$g^{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial \xi_k}{\partial x} + \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial \xi_k}{\partial y} + \frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial \xi_k}{\partial z}$$

によって定義され，方程式

$$\sum_i g_{ik} g^{il} = \begin{cases} 0 & (k \neq l \text{ のとき}) \\ 1 & (k = l \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たしている．

こうして Δu の曲線座標 ξ_1, ξ_2, ξ_3 への変換に対する一般の変換公式として次式が得られる：

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\sqrt{a} \sum_k g^{ik} u_k\right). \tag{61}$$

特に $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$ ならば，すなわち新座標系も，座標面 $\xi_1 =$ 定数，$\xi_2 =$ 定数，$\xi_3 =$ 定数が直交する直交系であるならば，変換公式は

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(u_1\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(u_2\sqrt{\frac{g_{11}g_{33}}{g_{22}}}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(u_3\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}}\right)\right\} \tag{62}$$

と簡単になる．

たとえば，**極座標** r, φ, θ の場合には

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad u = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2$$

であるから，簡単な計算によって

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \sin\theta)\right\} \tag{63}$$

が得られる.

独立変数が2個の場合には，対応する公式も明らかであろう：すなわち，x, y から ξ, η への変換が，もし

$$ds^2 = e\,d\xi^2 + 2f\,d\xi\,d\eta + g\,d\eta^2$$

ならば，微分表示の不変性

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{eg-f^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{gu_\xi - fu_\eta}{\sqrt{eg-f^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{eu_\eta - fu_\xi}{\sqrt{eg-f^2}}\right)\right\} \tag{64}$$

が得られる.

特に極座標の場合には

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad \Delta u = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right)\right\} \tag{65}$$

である.

4.8.3 楕円座標

さらなる重要な例は楕円座標[35]である．この座標は s に関する3次方程式

$$\frac{x^2}{s-e_1} + \frac{y^2}{s-e_2} + \frac{z^2}{s-e_3} = 1 \tag{66}$$

の3根 (3解) ρ, σ, τ として定義される．ただし e_1, e_2, e_3 は与えられた実数である．これらの根は実数の x, y, z に対しては実数であって，もし $e_1 > e_2 > e_3$ であるならば，次の不等式を満たすように大きさの順に並べることができる：

$$\varrho \geqq e_1 \geqq \sigma \geqq e_2 \geqq \tau \geqq e_3.$$

条件 $\rho =$ 定数，$\sigma =$ 定数，$\tau =$ 定数のそれぞれが定める曲面は，楕円面，一葉双曲面，二葉双曲面である．もとの直角座標は楕円座標を用いて

[35] ［原註］Jacobi, C.G.J.: Vorlesungen über Dynamik (gehalten in Königsberg im Wintersemester 1842/43, herausgegeben von A. Clebsch, Berlin 1866, abgedruckt als Supplementband in den Gesammelten Werken, Berlin 1884), 26. 計算の詳細をみることができる講義．そこでは，3次元に直接に一般化される考察がはっきりと示されている.

$$
(67)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(\varrho - e_1)(\sigma - e_1)(\tau - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \quad y^2 = \dfrac{(\varrho - e_2)(\sigma - e_2)(\tau - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 = \dfrac{(\varrho - e_3)(\sigma - e_3)(\tau - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \end{cases}
$$

と表わされる．また，線要素は

(68)

$$
\begin{cases} 4ds^2 = \dfrac{(\varrho - \sigma)(\varrho - \tau)}{(\varrho - e_1)(\varrho - e_2)(\varrho - e_3)}\, d\varrho^2 + \dfrac{(\sigma - \tau)(\sigma - \varrho)}{(\sigma - e_1)(\sigma - e_2)(\sigma - e_3)}\, d\sigma^2 \\ \qquad + \dfrac{(\tau - \varrho)(\tau - \sigma)}{(\tau - e_1)(\tau - e_2)(\tau - e_3)}\, d\tau^2 \end{cases}
$$

となる．

これらの式は，新しい変数として

$$
t_1 = \int^{\varrho} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad t_2 = \int^{\sigma} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad t_3 = \int^{\tau} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},
$$

ただし $f(\lambda) = 4(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)$

を導入すると見やすい形になる．実際，もし $e_1 + e_2 + e_3 = 0$（これは置換 $s = s' + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3)$ によって実現される）であるとし，さらに積分の下端を ∞ にとるならば，ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数[36]を使って

$$
\varrho = \wp(t_1), \quad \sigma = \wp(t_2), \quad \tau = \wp(t_3)
$$

と書くことができる．さらに

$$
ds^2 = (\varrho - \sigma)(\varrho - \tau)\, dt_1^2 + (\sigma - \tau)(\sigma - \varrho)\, dt_2^2 + (\tau - \varrho)(\tau - \sigma)\, dt_3^2
$$

である．よって (62) に従えば座標 t_i の関数 T に対して

(69)

$$
\Delta T = \frac{1}{(\sigma - \tau)(\tau - \varrho)(\varrho - \sigma)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t_1}\left((\tau - \sigma)\frac{\partial T}{\partial t_1}\right) + \frac{\partial}{\partial t_2}\left((\varrho - \tau)\frac{\partial T}{\partial t_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t_3}\left((\sigma - \varrho)\frac{\partial T}{\partial t_3}\right) \right\}
$$

---

36 ［原註］たとえば，Hurwitz–Courant: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3. Aufl. Berlin 1929, pp. 161–171.

$$= \frac{1}{(\varrho-\sigma)(\varrho-\tau)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} + \frac{1}{(\sigma-\tau)(\sigma-\varrho)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2} + \frac{1}{(\tau-\varrho)(\tau-\sigma)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_3^2}$$

が成り立つ．積分 t_i を使えば，直交座標が t_i の 1 価関数になるから特に好都合である．すなわち

(70)
$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{\wp(t_1)-e_1}\sqrt{\wp(t_2)-e_1}\sqrt{\wp(t_3)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}, \\ y = \dfrac{\sqrt{\wp(t_1)-e_2}\sqrt{\wp(t_2)-e_2}\sqrt{\wp(t_3)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_2-e_1}}, \\ z = \dfrac{\sqrt{\wp(t_1)-e_3}\sqrt{\wp(t_2)-e_3}\sqrt{\wp(t_3)-e_3}}{\sqrt{e_3-e_1}\sqrt{e_3-e_2}} \end{cases}$$

の式で分子の根号の符号を然るべく定めることにより，t_1, t_2, t_3 の 1 価関数になることが知られている．点 x, y, z が 1 つのオクタントを動くとき，数 ρ, σ, τ はそれぞれ対応する区間を動き，そのうちの 1 つが端点の値をとるとき，点 x, y, z はオクタントの境界面の図 1 で与えられている部分を動く．この図では楕円面 $\rho = \rho_1 > e_1$ の内側にある境界面の部分を示してあり，それを分割している曲線は

$$\textbf{焦楕円}\ \left(x = 0, \frac{y^2}{e_1-e_2} + \frac{z^2}{e_1-e_3} = 1\right)$$

および

$$\textbf{焦双曲線}\ \left(y = 0, \frac{x^2}{e_2-e_1} + \frac{z^2}{e_2-e_3} = 1\right)$$

の一部である．

いま，積分 t_i の実の周期を ω，純虚数の周期を ω'，すなわち

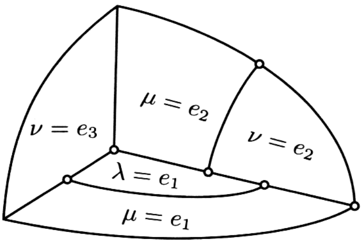


図 1.　共焦点 2 次曲面.

$$\omega = 2\int_{e_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad \omega' = 2\int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}$$

とすれば，t_1 を 0 から $\frac{\omega}{2}$ まで，t_2 を $\frac{\omega}{2}$ から $\frac{\omega+\omega'}{2}$ まで，t_3 を $\frac{\omega+\omega'}{2}$ から $\frac{\omega'}{2}$ まで変化させると，オクタントのすべての点が得られる．各 t_i に対する区間を 2 倍にすれば，点は全空間を動く．t_i の 1 価関数が空間で定義された関数としても 1 価であるためには，その関数は x, y, z をそれ自身に写すような t_i の任意の変換，たとえば t_1, t_2 をそれぞれ $\omega - t_1, \omega - t_2$ におきかえるような変換に対して不変でなければならない．

$t_1 = u$, $t_2 = \frac{\omega}{2} + iv$, $t_3 = \frac{\omega'}{2} + w$, $\wp(t_1) = f(u)$, $\wp(t_2) = g(v)$, $\wp(t_3) = h(w)$ とおけば，u, v, w は実にとれる．そのとき

(71)
$$\begin{cases} ds^2 = \big[f(u) - g(v)\big]\big[f(u) - h(w)\big]\,du^2 \\ \qquad + \big[f(u) - g(v)\big]\big[g(v) - h(w)\big]\,dv^2 \\ \qquad + \big[f(u) - h(w)\big]\big[g(v) - h(w)\big]\,dw^2 \end{cases}$$

となる．各係数は，u, v, w が実のとき，$f(u) \geqq e_1 \geqq g(v) \geqq e_2 \geqq h(w) \geqq e_3$ から，負ではない．対照的に，t_1, t_2, t_3 について対称な ds^2 の式においては，dt_2 が純虚数であるから，その係数が負であることによって，ds^2 の定値性が保証されている．

退化した楕円座標については，極座標もその 1 つなのであるが，それを除いて，**回転楕円座標**，および**回転放物座標**にだけ触れよう．

数 e_i のうちの 2 つ，たとえば e_1 と e_2 を一致させたときは

(72)
$$\frac{x^2 + y^2}{s - e_1} + \frac{z^2}{s - e_3} = 1$$

となり，新しい座標は，この方程式の 2 根 $s = \lambda_1$, $s = \lambda_2$ に，

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

で定義される角 φ を加えたものである．ここで

(73)
$$r^2 = \frac{(\lambda_1 - e_1)(\lambda_2 - e_1)}{e_3 - e_1}, \qquad z^2 = \frac{(\lambda_1 - e_3)(\lambda_2 - e_3)}{e_1 - e_3},$$

$$ds^2 = r^2\,d\varphi^2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4(\lambda_1 - e_1)(\lambda_1 - e_3)}\,d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_2 - e_1)(\lambda_2 - e_3)}\,d\lambda_2^2$$

(74)
$$= r^2\,d\varphi^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(dt_1^2 - dt_2^2)$$

ただし

$$t_i = \int^{\lambda_i} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}}. \tag{75}$$

これらにより，

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_2}\right)\right]. \tag{76}$$

ここでさらに，楕円面の頂点の 1 つを無限に遠ざけるとすれば，対応する極限移行の結果として[37]，**回転放物座標**が方程式

$$\frac{x^2 + y^2}{s - e_1} - 2z + s - e_1 = 0 \tag{77}$$

の根 λ_1, λ_2 を用いて得られる．そうして r, z は次の形に表わされる：

$$r^2 = -(\lambda_1 - e_1)(\lambda_2 - e_1), \quad 2z = 2e_1 - \lambda_1 - \lambda_2. \tag{78}$$

λ_1, λ_2 および φ が空間の座標として用いられる．このときの線要素は (74)：

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2\, d\varphi^2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{4(\lambda_1 - e_1)}\, d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_2 - e_1)}\, d\lambda_2^2 \\ &= r^2\, d\varphi^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(dt_1^2 - dt_2^2) \end{aligned}$$

となるが，ここで

$$t_i = \int^{\lambda_i} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)}} = \sqrt{\lambda_i - e_1} \tag{79}$$

である．さらに，微分式 ΔT は次の形をとる：

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_2}\right)\right]. \tag{76}$$

上記の線要素の表式の中から φ が現れる項を取り除けば，直ちに r, z 平面の楕円あるいは放物座標が得られる．いずれの場合についても，ΔT（の表式）としては (64) により，

$$\Delta T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2}\right)$$

---

[37] ［原註］これらの座標が簡単に直接定義されることは明らかである．それには共焦回転放物面の族 (77) から出発すればよい．

が導かれる．ただし λ_i と t_i との関係は，公式

$$t_i = \int^{\lambda_i} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}}$$

あるいは，公式

$$t_i = \sqrt{\lambda_i - e_1}$$

によって与えられる．

4.9 変分問題の標準形および包合形への変換

ラグランジュの乗数法は，変分問題での理論あるいは応用の目的にとって，同様に重要な変換へ我われを導くものである．

これらの変換を用いると，与えられた問題に同値な新しい問題，すなわち，停留状態が両者において同時に起こるという意味で同値な問題を定式化することができる．それにより，対称性ならびに展望のよさに秀でたやり方で，変分問題の確かで形式的な変形ができるのである．それだけでなく，広い範囲の問題において，極小値 d をもつ極小問題が与えられたとき，それと等しい値 d を極大値にもつ同値な極大問題をつくることが可能である．これは d の値を数値的に上と下から限定する実際的な問題に対して手がかりを提供するものである[38]．

4.9.1 付帯条件付きの通常の極小問題の変換

まず，理解の助けとして，通常の多変数関数の最小値問題に言及しよう．すなわち，我われの「変形」の第一歩として次の自明な原理を述べよう：

《定理》 もし，関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が点 $x_i = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ において停留値をとり，さらに，その ξ_i がある関係 $r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$ を満たして

38 ［原註］これら実際的な観点については下巻で組織的にふれる．ここでは，Trefftz, E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, Verhdl. d. 2. Int. Kongr. für Technische Mechanik, Zürich 1927, p. 131 の研究にやはり注意しておこう．そこでは，まず暗示的な仕方でこれら限定が示される．

いるならば，この関係 $r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$ を付帯条件の中にはじめからつけ加えておいたとしても，f が $x_i = \xi_i$ においてやはり停留値となることに変わりはない．□

さて次の問題から始めよう．

I：$f(x,y)$ を付帯条件 $g(x,y)=0$ のもとで停留ならしめよ．ただし，通常の連続性と可微分性の要求は満たされているものとし，停留点では $g_x^2 + g_y^2 \neq 0$ であると仮定する．

乗数法によれば，問題 I は次の同値な問題におきかえられる：

II：$F(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ を 3 個の変数 x, y, λ の関数として停留ならしめよ．

この場合には，停留の条件式 $dF = 0$ は，3 個の方程式 $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$, $g = 0$ と同値である．一方，仮に問題 II から出発したとすれば，問題 II の解によって自動的に満足されている条件 $g=0$ を付帯条件に明示的に追加しても，前述の一般原理により同値である．すなわち，問題 II は，問題 I にそのまま到達するのである．

しかし問題 II と同値な（同値とは，停留性が同じ点で現れるという意味）さらに別の問題が次のようにして導かれる．それは付帯条件として，$g=0$ ではなく，II の解が満たす他の 2 個の方程式を用いることによるのである．すなわち，

III：$F(x,y;\lambda) = f + \lambda g$ を付帯条件 $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$ のもとで停留ならしめよ．

もしこの 2 つの付帯条件から停留点の近傍で x と y を λ の関数として解くことができると仮定すれば，それらを代入することにより，$F(x,y;\lambda)$ は λ の関数 $\psi(\lambda)$ になる．これから，前の問題にやはり同様な次の問題が得られる：

IV：$\psi(\lambda)$ を停留ならしめよ．

さて，次に停留性だけを問う立場から，さらに極大値が，あるいは極小値が起こっているかどうかを問うことにより，主張をもっと精密にしよう．まず問題 I（以後これを I′ で表わす）において f が点 $\bar{x}, \bar{y}$ で真の極小値 $f(\bar{x},\bar{y}) = d$ をとるとしよう．次の問題を考える：

II′: λ を**固定した**上で，$F(x,y;\lambda) = f + \lambda g =$ 極小ならしめよ．ただし，

以下のことを仮定しよう：λ が，ラグランジュの乗数法で定められた値 $\lambda = \bar{\lambda}$ のある近傍で任意に選ばれたとき，各 λ に対して F の極小値 $d_\lambda = \psi(\lambda)$ が実際に存在する．それは方程式 $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$ によって定まる点においてである．この仮定の下では不等式

$$d_\lambda \leqq d$$

が成り立つ．なぜなら，極小値 d を与える問題 I′ は，問題 II′ において変数の領域を制限する付帯条件 $g = 0$ をつけ加えたときの極小値 d_λ とみなすことができるからである．一方，もし $\bar{\lambda}$ の近傍内のどの λ に対しても，方程式 $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$ により x と y が λ の関数として一意に定まるとの仮定のもとでは $d_{\bar{\lambda}} = d$ である．従って，

$$d = \max d_\lambda$$

である．すなわち，d は $\boldsymbol{F = f + \lambda g}$ **（$\boldsymbol{\lambda}$ を固定したとき）の極小値 $\boldsymbol{\psi(\lambda)}$ の（$\boldsymbol{\lambda}$ を動かしたときの）極大値**である．こうして，上記の仮定のもとで，d を次の問題によって特徴づけることができる：

III′: $F(x, y; \lambda) = f + \lambda g =$ 極大 $= d$ たらしめよ．ただし，付帯条件は $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$.

上述の極大–極小の考え方の幾何学的な説明に役立つ例として，次の問題を見てみよう：$f = (x+1)^2 + y^2 =$ 極小，付帯条件 $g = 2x = 0$.

これは幾何学的には，xyz-空間で放物面 $z = (x+1)^2 + y^2$ と平面 $x = 0$ との交線である鉛直放物線の最低点を求める問題である．求める $z = (x+1)^2 + y^2$ の最小値が $d = 1$ であることは直ちにわかる．固定した λ に対して，放物面 $z = f + \lambda g = (x + \lambda + 1)^2 + y^2 - 2\lambda - \lambda^2$ は常に上述の放物線を含む．そして放物面の頂点は放物線の頂点より低い位置にある．λ を変化させれば放物面の頂点は移動するが，高さはせいぜい放物線の頂点までであって，それを超えて高くなることはない．すなわち，放物線の頂点は我われの放物面の最低点の中で最高点である．

4.9.2 最も簡単な変分問題の包合的変換

§4.9.1 のときと類似な考察により，与えられた変分問題を変形する（いい換える）ことができる．

その基礎となるのは，§4.9.1 のときと同じく，次の一般原理である：

《原理》 与えられた付帯条件（および連続性の仮定）のもとでの汎関数 $J[u, v, ...]$ が，特定の関数系 u, v, ... に対して停留であり，この関数系 u, v, ... が 1 つまたはいくつかの関係を満たしているならば，この関係を付帯条件にあらかじめ追加した変分問題についても J はやはり関数系 u, v, ... において停留である．□

これから先は，変分を 0 とおいて得られる条件（たとえばオイラーの方程式や自然境界条件など）を**自然条件**と呼ぶこととし，他方，あらかじめ課せられている付帯条件や境界条件を**拘束条件**と呼ぶ．そうすると，前述の原理から，次のことがいえる：

《原理》 与えられた汎関数の変分問題に対して，1 つまたはいくつかの自然条件を拘束条件の中に明示的につけ加えても，この汎関数の停留性はたもたれる．□

ここで，最も単純な型の問題を扱ってみよう：

I：$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')\, dx$ を通常の連続性の条件，境界条件

$$u(x_0) - u_0 = 0, \quad u(x_1) - u_1 = 0 \tag{80}$$

および付帯条件

$$\frac{du}{dx} - u' = 0 \tag{81}$$

のもとで停留ならしめよ．

すなわち，ここでは問題を u および u' という 2 個の未知関数を含む変分問題とみなして，それに (81) という微分方程式形の付帯条件をつけている．乗数法によれば問題 I の解は，そのまま次の問題の解でもある：

II： $$H[u, u', \lambda; \mu_0, \mu_1] = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx$$

$$- \mu_0(u(x_0) - u_0) + \mu_1(u(x_1) - u_1)$$

を停留ならしめよ.

そのように $u(x)$, $u'(x)$, $\lambda(x)$ およびパラメータ μ_0, μ_1 を決定するのであるが，その際，付帯条件も境界条件もなく，いうなれば問題は自由問題である.

変分の方程式，すなわちオイラーの微分方程式と自然境界条件は，第1変分を0とおけば直ちに得られ，次の形をとる：区間内で

(82) $$F_{u'} - \lambda = 0,$$

(83) $$F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

(84) $$\frac{du}{dx} - u' = 0.$$

境界点で

(85) $$\lambda(x_0) + \mu_0 = 0, \qquad \lambda(x_1) + \mu_1 = 0,$$

(86) $$u(x_0) - u_0 = 0, \qquad u(x_1) - u_1 = 0.$$

上式から λ, μ_0, μ_1 を消去すれば $u(x)$ についてのオイラーの微分方程式が得られることは明らかである.

さて，我われの一般原理を問題 II に当てはめて，条件 $\frac{du}{dx} - u' = 0$, $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$ をあらかじめ拘束条件としてつけ加えれば，問題 I に戻ることになる.

他方，もし問題 II の自然条件に対応する方程式 (82), (83), (85) をまとめて用いると，1つの変換が得られるが，これは最初にフリードリックス (Friedrichs) によって見出された，応用上も重要な変換である[39].

この方針によって得られる問題 III は，問題 I と同じ型をしているのであるが，具体的には積分 H から部分積分によって $\frac{du}{dx}$ を取り除いたあとで新しい引数関数（許容関数）p, p' と新しい被積分関数 $\Psi(x, p, p')$ を次の方程式に

---

[39] ［原註］Friedrichs, K.: Ein Verfahren der Variationsrechnung, ..., Nachrichten der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1929, pp. 13–20.

［訳註］フリードリックス変換あるいは相反形への変換と呼ばれる.

従って導入することによって得られる.

(87) $$F_{u'} = p, \quad F_u = p', \quad pu' + p'u - F = \Psi.$$

この「ルジャンドル」変換が意味をもつためには, u と u' を, 第1と第2の方程式から p, p', x の関数として表わし, それらを第3の方程式の左辺に代入することが可能でなければならない. この操作は, 基礎にとった領域における x, u, u' のあらゆる値について, 条件

(88) $$F_{u'u'}F_{uu} - (F_{uu'})^2 \neq 0$$

が満たされていれば, 確かに可能なのである.

このようにして問題 I に同値な次の(相反)問題[40]が得られる:

IV: $$-\int_{x_0}^{x_1} \Psi(x, p, p')\, dx + p(x_1)u_1 - p(x_0)u_0$$

を付帯条件

$$\frac{dp}{dx} - p' = 0$$

のもとに, そうして境界条件を課すことなしに, 停留ならしめよ.

問題 IV の自然条件は, 内点で

$$\frac{d}{dx}\Psi_{p'} - \Psi_p = 0$$

であり, 境界で

$$\Psi_{p'}|_{x_0} - u_0 = 0, \quad \Psi_{p'}|_{x_1} - u_1 = 0$$

である. ここまでの一般的な導き方に基づき, これらは問題 I の拘束条件と一致しなければならない. 実際, ルジャンドル変換 (87) の逆変換

$$\Psi_{p'} = u, \quad \Psi_p = u', \quad up' + u'p - \Psi = F$$

を用いれば, この一致は直ちに確かめられる.

また, 同じ式のおかげで, 自由問題 IV にフリードリックス変換をほどこすと, 出発点の問題 I に戻ることがわかる. **すなわちこの変換は包合的な特**

---

40 [原註] これは §4.7.1 の問題 IV に類似している.

性[41]をもっており，その変換により問題の自然条件は他方の問題の拘束条件と入れ替わるのである．

格別の考察が必要なのは退化した場合，すなわち変分問題の被積分関数 F が u を陽に含まないか，あるいは u を含むにしても線形にしか含まない場合，すなわち

$$F(x, u, u') = g(x, u') + uf(x)$$

という場合である．この場合には，前に考えたルジャンドル変換は，もはや任意の p と p' について可逆であるといえない．しかしながら，我われの変換原理を趣旨に戻って当てはめてみると，もとの変分問題 I と次の変分問題が同値であることが容易にわかる：付帯条件 $\frac{dp}{dx} = f(x)$ のもとで

$$-\int_{x_0}^{x_1} \Phi(p)\, dx + p(x_1)u_1 - p(x_0)u_0 = \text{停留}$$

ならしめよ．ここで，p と $\Phi(p)$ はもとの問題の式と変換

$$p = g_{u'}, \quad -\Phi(p) = g(u') - u'p$$

を通して結ばれている．そして方程式 $g_{u'} = p$ から逆に u' が p を使って表わされるとしてよい．

この新しい問題はもとの問題に比較して原理的に簡単化されている．求めるべき関数 $p(x)$ が，付加パラメータを別にすれば，付帯条件から積分計算により得られる．従って，この**退化した場合の変分問題**は，1 個のパラメータを決めるという**通常の極値問題**に帰着するのである．

ここまでは，単に汎関数の停留値に関心を寄せたのであったが，§4.9.1 で行なったのと同様に，極大あるいは極小の起こり方がこれらの変換によってどのように影響されるかという問いを設けよう．

§4.9.1 での論法を繰り返すことにより，次の結果が得られる：

《結果》もしもとの問題 I（これから後 I′ と書く）において極小値 d が存在したとすると，その値 d はもとの問題に包合的に対応する（相反）問題 IV（これから後は IV′ と書く）においては極大値として現れる．□

41　［訳註］2 度行なえばもとに戻るという特性．

§4.9.1 と事情は同じで，上の定義は限られた条件のもとでしか成り立たない．そこで具体的には，区分的に連続な導関数をもち，$\lambda(x_1) + \mu_1 = 0$, $\lambda(x_0) + \mu_0 = 0$ を満たす[42]ような任意の $\lambda(x)$ に対して，問題 II (p. 249) の H の式が λ に依存する極小値 d_λ をもつことを仮定しよう．そうすると部分積分により u の導関数を消去して次の問題が得られる：

$$\mathrm{II}'\colon\ H = \int_{x_0}^{x_1}\left[F + \lambda\left(\frac{du}{dx} - u'\right)\right]dx - \mu_0(u(x_0) - u_0) + \mu_1(u(x_1) - u_1)$$
$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[F - \frac{d\lambda}{dx}u - \lambda u'\right]dx - \lambda(x_0)u_0 + \lambda(x_1)u_1$$
$$= \text{極小}$$

ならしめよ．この問題の解となる関数 $u(x)$, $u'(x)$ は，方程式

$$F_{u'} - \lambda = 0, \quad F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0 \tag{89}$$

を満たす．

さらに §4.9.1 における扱いに対応して，方程式 (89) から任意の λ, $\frac{d\lambda}{dx}$ に対して関数 u, u' が一意に決まるという仮定を設ける．

極小値 d が存在する問題 I′ は，問題 II′ に付帯条件 $\frac{du}{dx} - u' = 0$, $u(x_0) - u_0 = 0$, $u(x_1) - u_1 = 0$ を追加して導かれたものにほかならないから，当然 $d \geqq d_\lambda$ が成り立つ．

他方で，問題 I′ の解は方程式 (89) を $\lambda = \bar{\lambda} = F_{u'}$ に対して満たす．よって一意性の仮定から $d_\lambda = d$ である．

従って

$$d = \max d_\lambda.$$

ところが d_λ を極大にせよという問題というのがまさに問題 IV′ である．これで主張の証明が完了する．

上で用いた仮定が成り立つための 1 つの十分条件は，不等式

$$F_{u'u'}F_{uu} - (F_{uu'})^2 > 0, \quad F_{u'u'} > 0 \tag{90}$$

---

42 ［原註］解が自動的に満たしているこの条件がないと，任意の λ, μ に対して極小値を得ることは不可能であろう．

が考えている領域内のすべての u, x, および任意の u' に対して成立することである．すでに見たように (p. 229), もしこれらの不等式が成立しているなら，オイラーの方程式の解は問題 I′ の極小を与える．また，問題 II′ の極小値 d_λ の存在も同じ不等式から同様にして示される．なぜならば，方程式 (89) と不等式 (90) が共に成り立てば，各 x において H の被積分項が，問題にしている u と u' の値に対して極小をもつことになるからである．従って確かに，H 自身も極小である．

最後に，上で述べた極小問題から極大問題への移り変わりが，フリードリックス変換によって (90) の仮定のもとで実現することを指摘しておこう．その際，相反変換が改めて導かれるのである．さて，不等式 (90) を考慮すれば，テイラー (Taylor) 展開により次の不等式が直ちに得られる：

$$F(u,u') - F(v,v') - (u-v)F_v - (u'-v')F_{v'} \geqq 0.$$

ここで等号が成り立つのは $u=v$, $u'=v'$ のときに限る．

上の左辺の式を

$$F(u,u') - [F(v,v') - vF_v - v'F_{v'}] - uF_v - u'F_{v'}$$

と書き直し，v と v' はルジャンドル変換

$$p = F_{v'}, \quad p' = F_v, \quad \Psi(x,p,p') = vp' + v'p - F$$

によって，p, p' で表わされると考えれば，上の不等式は任意の u, u', p, p' に対して

$$F(x,u,u') + \Psi(x,p,p') - up' - u'p \geqq 0$$

が成立することを意味する．等号は p, p' が $v=u$, $v'=u'$ に対応するものであるときに限り成り立つ．この不等式を x_0 から x_1 まで積分するのであるが，その際 u, u', p, p' は，x の関数であり拘束条件

$$\frac{du}{dx} - u' = 0, \quad \frac{dp}{dx} - p' = 0, \quad \begin{aligned} &u(x_0) - u_0 = 0, \\ &u(x_1) - u_1 = 0 \end{aligned}$$

に従うものとするのである．積分の結果，左辺はもちろん負にはなり得ない．そうして，積分は u が問題 I′ の解であり，かつ p が問題 IV′ の解であるとき

に限り 0 となる．

よって上の拘束条件のもとでの

$$\int_{x_0}^{x_1} [F + \Psi - up' - u'p]\, dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} F\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \Psi\, dx + u_0 p(x_0) - u_1 p(x_1) = \text{極小}$$

の問題は u と p を解としてもち，この問題の極小値は 0 である．このことは問題 I′ と問題 IV′ の関係について上で主張したことと同値である．

4.9.3　変分問題の標準形への変換

§4.9.2 で述べた一般原理からは，これもまた古くからよく知られた重要な変換，すなわち**標準形への変換**が導かれる．その変換に関してオイラーの 2 階微分方程式の代わりに 1 階微分方程式系が登場するのである．この変換は，§4.9.1 の中にその正確な類似物をもたないのであるが，導き方としては，方程式 (82) と (86) を問題 II への拘束条件としてつけ加えるのである．そうすると，まず次の問題が得られる：

IIa：
$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F(x, u, u') + F_{u'} \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx$$

を境界条件 $u(x_0) = u_0$, $u(x_1) = u_1$ のもとで停留ならしめよ．ただし u と u' は 2 個の独立な引数関数である．

ついで，u' の代わりに新しい引数関数[43]

$$p = F_{u'}$$

を，$F(x, u, u')$ の代わりに新しい被積分関数

$$\Phi(x, u, p) = pu' - F(x, u, u')$$

を導入する．その際，

$$F_{u'u'} \neq 0$$

43　［原註］p は問題 II に現れる乗数に等しい．

を明示的に仮定しておこう．それは $p = F_{u'}$ から u' が p, u, x の関数として解かれ得るためである．こうして次の同値な問題が得られる：

境界条件 $u(x_0) = u_0,\ u(x_1) = u_1$ のもとで

$$\text{IIb}: \qquad \int_{x_0}^{x_1} \left[p\frac{du}{dx} - \Phi(x, u, p) \right] dx = \text{停留}$$

ならしめよ．

同値の問題 I と IIb に現れる量は**ルジャンドル変換**

$$F_{u'} = p, \quad pu' - F = \Phi$$

で結ばれている．これの逆変換は，容易にわかるように，方程式

$$\Phi_p = u', \quad pu' - \Phi = F$$

と表わされる．

変分問題のこの形を**標準形**と名付けるのである．p と u の変分方程式をつくれば**変分問題の標準微分方程式**

$$\frac{dp}{dx} + \Phi_u = 0, \quad \frac{du}{dx} - \Phi_p = 0$$

が得られる．

同様な方法で x についての n 個の未知関数 $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ に対する変分問題を標準形に変換することもできる．

極値の起こり方についての個々の判定条件に立ち入ることは見送り，次のことだけを述べておこう：問題 I が極小値 d をもつとすれば，標準形の問題では d は次の意味で「極小の極大」である．すなわち，まず固定した p に対して，u を変化させて極小を見出し，ついで，p を変化させてその極小値（p の関数）の極大値を求めれば，それは d である．

4.9.4　一般化

上述の変換理論が，複数個の未知関数，高次導関数，多変数の引数関数を含む問題などに一般化される事実，およびその方法については詳論する必要はあるまい．ここでは，§4.9.2 の退化した場合に対応する特に簡単な 2 個の

独立変数の例を扱うだけで善しとしよう．すなわち，次のディリクレの古典的な変分問題の変換を考察しよう：

$$\text{I}: \qquad \frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \text{最小}$$

ならしめよ．ただし u は領域 G において区分的連続な導関数をもつ x, y の関数で，境界値 $\bar{u} = f(s)$ が指定されている．また G の境界 Γ については，接線の方向の変化は区分的に連続であり，その孤長を s で表わす．

問題 I において 2 つの偏導関数を関数 p, q におきかえ，付帯条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, $\frac{\partial u}{\partial y} = q$ を追加して，乗数法を適用すれば，直ちに次の同値な問題が導かれる：

$$\text{II}: \quad \iint_G \left[\frac{1}{2}(p^2+q^2) + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} - p\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} - q\right)\right] dx\,dy \\ - \int_\Gamma \varrho(s)[\bar{u} - f(s)]\,ds = \text{停留}$$

ならしめよ．ただし $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$, $\rho(s)$ は未定乗数である．2 重積分を部分積分で変形すれば，問題 II は次の形になる：

$$\iint_G \left[\frac{1}{2}(p^2+q^2) - u\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) - \lambda p - \mu q\right] dx\,dy \\ + \int_\Gamma \left[\bar{u}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial x}{\partial n} + \bar{\mu}\frac{\partial y}{\partial n} - \varrho(s)\right) + \varrho(s) f(s)\right] ds = \text{停留}.$$

ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は外向き法線方向への微分を表わし，上に横棒をつけた $\bar{u}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ はいつものように境界値を表わす．この問題の自然境界条件のうちから，この問題のオイラーの方程式

$$p - \lambda = 0, \qquad\qquad q - \mu = 0,$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \qquad \bar{\lambda}\frac{\partial x}{\partial n} + \bar{\mu}\frac{\partial y}{\partial n} - \varrho = 0$$

を明示的な付帯条件につけ加えるのである．すると，次の同値な問題が得られる：

$$\text{III}: \qquad -\frac{1}{2}\iint_G (p^2+q^2)\,dx\,dy + \int_\Gamma \varrho(s) f(s)\,ds = \text{停留}$$

ならしめよ．ただし，付帯条件は，境界で

$$\varrho(s) - \bar{p}\frac{\partial x}{\partial n} - \bar{q}\frac{\partial y}{\partial n} = 0$$

であり，内点で

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

である．これでフリードリックス変換が完了した．

ここで関数 $v(x,y)$ を導入し，方程式

$$p = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad q = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

によってあとの方の付帯条件が満たされるようにすれば，結果をもっと見やすい形にすることができる．このときには

$$\bar{p}\frac{\partial x}{\partial n} + \bar{q}\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}$$

となるから（右辺の偏微分は Γ の正の接線方向への微分である），問題 III は次の問題となる：

$$\text{IV}: \qquad -\frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s} f(s)\,ds = \text{停留}$$

ならしめよ．

左辺の境界積分はたまたま部分積分ができて

$$-\int_\Gamma v f'(s)\,ds$$

の形になる．この新しい問題では，被積分関数が問題 I と同じ形になった．問題 I の解はポテンシャル方程式 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ の解で，境界値が $f(s)$ に等しいものである．問題 IV の解もポテンシャル関数 v であるが，この方は自然境界条件のおかげで u に共役なポテンシャル関数であることがわかる．

もう 1 つの事実として，問題 I の極小値は，そのまま問題 IV の極大値である．このことを認めるためには，問題 I の積分の表式から問題 IV の積分の表式を差し引いて簡単な計算を行ない，この差が

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy$$

となることを知るのが最善であろう．問題 I と問題 IV を合わせたものは，1 つの境界条件 $\bar{u} = f(s)$ のもとで上の積分を極小にするという問題と同値である．極小値は 0 であって，それが到達されるのは，u がポテンシャル方程式の境界値問題の解であり，かつ v が微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たす u の共役関数であるときである．

4.10　変分法と数理物理学の微分方程式

4.10.1　一般的な注意

数理物理学の微分方程式の大部分について定式化したり処理したりするに当たって，変分法が信頼すべき案内人となる．安定な平衡の問題を扱うのであれば，**ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）を極小にするという変分原理**を出発点にするのがよい．また運動の法則は**ハミルトンの変分原理**を用いれば極めて容易に導かれる．この節では，これら 2 つの原理に基づいて，数理物理学の最も重要で典型的な微分方程式の問題を定式化しよう．

まず有限の自由度（たとえば自由度 n）をもつ系を考える．この系の状態は n 個のパラメータ $q_1, q_2, \ldots, q_n$ の値によって特徴づけられるものとして，それを時刻 t の関数として決めるのが我われの目的である．系の力学的性質は，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーによって定まるものと考える．**運動エネルギー** $T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t)$ は n 個の速度 $\dot{q}_i$, n 個の座標 q_i, および時刻 t の関数であって，具体的には，

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} P_{ik}(q_1, \ldots, q_n, t)\dot{q}_i\dot{q}_k$$

という速度の 2 次形式で表わされるとしよう．一方，**ポテンシャルエネルギー** $U(q_1, \ldots, q_n, t)$ は，座標 $q_1, \ldots, q_n$ と t のある関数であると仮定する．このとき，ハミルトンの原理は次のように言い表わされる：

《ハミルトンの原理》 2 つの時刻 t_0, t_1 の間で起こる運動は，積分

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

を停留にするような関数 $q_i(t)$ によって実現される．その際，比較の対象とする関数は $\bar{q}_i(t_0) = q_i(t_0)$, $\bar{q}_i(t_1) = q_i(t_1)$ を満たす近接した関数 $\bar{q}_i(t)$ のすべてである．いいかえれば，現実に起こる運動は，出発位置から到達位置まで同一時間内に考えられるあらゆる近接した仮想的な運動のうち積分 J に停留値をとらせるものである．□

§4.3 の方針に従えば，このハミルトンの原理から，一般の**ラグランジュ (Lagrange) の運動方程式**

(91) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

が直ちに導かれることになる．

運動方程式から**平衡の条件**を導くには，T と U が t をあらわに含まないという仮定のもとであるが，(91) において時間微分を 0 とおけばよい．結果は

(92) $$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

である．

いいかえれば，ポテンシャルエネルギー $U(q_1, \ldots, q_n)$ をもつ力学系は，座標 $q_1, \ldots, q_n$ の値のある組合せに対して平衡となるのは，ポテンシャルエネルギーがその点で停留値をもつとき，かつそのときに限ってのことである．

平衡が安定であるためには，さらにその平衡点において U が極小値をもつことが必要かつ十分である．

この事実は運動方程式を使って証明することができる．しかし，ここでは平衡の問題での独立な「公準」として位置づけることにしたい．

力学系の運動は，系の安定な平衡状態の近傍で起こるときには特に簡単な性質を示す．一般性を失うことなく，着目する平衡状態では，すべての座標 q_i が 0 であると仮定しよう．そうして，これ以後，平衡状態の近くで起こる運動状態だけに話を限ることにする．座標の高次の項および座標の時間微分の高次の項は低次の項に対して無視できるから，T と U の中に t があらわには含まれていないという仮定のもとに，T を定係数 a_{ik} をもつ $\dot{q}_i$ の正定値 2 次形式

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

とみなすこと，また同様に，U を定係数 b_{ik} をもつ q_i の正定値 2 次形式

$$U = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}q_iq_k$$

とみなすことができる．その結果，運動方程式は定係数の 2 階線形微分方程式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}q_k = 0$$

となる．これは安定な平衡状態のまわりの**微小振動**を支配する方程式で，次章で詳しく議論することにする．

状態が，もはや，有限個の座標だけでは表わすことのできない連続体の力学系であっても，ハミルトンの原理，すなわちポテンシャルエネルギー最小の原理から出発することができる．ただしこの場合には，ポテンシャルエネルギーも運動エネルギーも有限個の変数やその導関数の関数によってではなくて，系が占めている空間，曲面，曲線などにわたる積分によって表わされる．

4.10.2 振動する弦（綱）および振動する棒

最も簡単な例は，振動する一様な弦（または綱）によって与えられる．これは，安定した平衡状態，すなわち静止の状態においては，x 軸上の線分 $0 \leqq x \leqq l$ の区間を占めるものであり，一定の張力 μ のもとにあり，静止の位置のまわりに小さい横振動を行なうことができるとする．平衡状態で点 x を占めていた弦の 1 点が，時刻 t において x 軸に垂直に移動した距離を $u(x,t)$ と書くことにすると，この関数 $u(x,t)$ を決定することが課題である．運動が「小さい」とする仮定は，関数 u とその導関数の高次のベキが低次のベキに対して省略されるという形で式に取り込まれる．さて，弦は端点で固定されている，すなわち $u(0,t) = u(l,t) = 0$ であると仮定する．弦の運動エネルギーは積分 $\frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t^2\,dx = T$ で与えられる．ここで ρ は弦の質量密度である．ポテンシャルエネルギー U は静止状態での長さからの伸びに比例する．その比例定数は張力 μ に等しい．弦の長さの変化 $\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\,dx - l$ は高次の項

を省略すれば $\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2\,dx$ に等しい．これより，ポテンシャルエネルギーは次式で表わされる：

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l \mu u_x^2\,dx.$$

ハミルトンの原理の要請は，2重積分

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\varrho u_t^2-\mu u_x^2)\,dx\,dt$$

を停留にすることである．その際，比較対象として許容されるのは，$x=0$, l で0となり，$t=t_0, t_1$ で現実の運動に一致する関数値 $u(x,t_0)$, $u(x,t_1)$ をもつような，そうして，1階導関数が区分的連続なすべての連続関数 $u(x,t)$ である．こうして，ρ と μ が定数である場合，変分法の一般原理から直ちに，次の振動する弦の偏微分方程式

$$\varrho u_{tt}-\mu u_{xx}=0 \tag{93}$$

が得られる．

もし弦に外力 $f(x,t)$ が働くならば，ポテンシャルエネルギーの表式にさらに $\int_0^l f(x,t)u\,dx$ が加わるから，微分方程式は

$$\varrho u_{tt}-\mu u_{xx}+f(x,t)=0 \tag{94}$$

となる．

外力のもとでの弦の安定な平衡は，極小原理に従って積分 $\int_0^l(\frac{\mu}{2}u_x^2+fu)\,dx$ の最小によって与えられる．当然ながら外力 $f(x)$ は時間によらないものと仮定される．この特別な場合には，オイラーの方程式として

$$\mu u_{xx}-f(x)=0$$

が得られる．

次に，**横振動する棒の状態**を記述する方程式を立てるための出発点として，棒とは，静止状態では直線をなす1次元連続体であって，変形によるポテンシャルエネルギーが曲率の2乗を長さの方向に積分した量に比例するものであると仮定する．ここでもまた変形関数 $u(x,t)$ とその導関数の高次のベキが低次のベキと比べて省略できると仮定すれば，変形のポテンシャルエネル

ギーの表式として $\frac{\mu}{2}\int_0^l u_{xx}^2\,dx$ が得られる．運動エネルギーの表式は弦の場合と同じである．さらに一般に外力 $f(x,t)$ が働くとすれば，運動の微分方程式はハミルトンの原理により

$$\varrho u_{tt} + \mu u_{xxxx} + f(x,t) = 0$$

となる．一方，外力 $f(x)$ の影響のもとでの平衡に対しては次の条件が成り立つ：

$$\mu u_{xxxx} + f(x) = 0.$$

これまでに述べてきた変分問題の解に対して，どのような境界条件あるいは拘束条件が課せられるかの問題は極めて重要である．たとえば，弦の場合には $u(0) = u(l) = 0$，棒の場合には $u(0) = u_x(0) = u(l) = u_x(l) = 0$ となるような固定境界条件の代わりに，端点を自由にすることが考えられる．そうすると §4.5 に述べた方法によって，弦については

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \tag{95}$$

であり，棒については

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(l,t) = 0 \tag{96}$$

のように自然境界条件が登場する．

弦の端点が完全には固定されず弾性力で留めてある場合には，端点でのポテンシャルエネルギーの表式にそれぞれ $h_1\frac{\mu}{2}u^2(0,t)$, $h_2\frac{\mu}{2}u^2(l,t)$ の項がつけ加わる．これらの項は運動方程式 (94) を変化させることはないが，§4.5 のときと同様に自然境界条件

$$u_x(0,t) = h_1 u(0,t), \quad u_x(l,t) = -h_2 u(l,t)$$

を与える．

その他のことについては，この章の付録 §4.11.15 を参照されたい．そこでは棒に対して，より一般的な境界条件などが考察されている．

4.10.3　膜および板

平面の膜と板についても基本的な扱いに異なるところはない．ここで，膜と

は静止の状態では平面形をした弾性体の面分であって，(変形による) ポテンシャルエネルギーが面積の変化に比例して変化する（比例定数を張力と呼ぶ）ものをいう．いま，静止の状態では，膜は xy-平面の領域 G を覆っているとし，点 (x,y) における静止平面に垂直な変形を $u(x,y)$ で表わす．この場合にも，変形が小さいとし，詳しくは u, u_x, u_y の高次のベキが低次のベキに比べて無視できるほど小さいと仮定すると，膜の表面積 $\iint_G \sqrt{u_x^2+u_y^2+1}\,dx\,dy$ を $\iint_G (1+\frac{u_x^2+u_y^2}{2})\,dx\,dy$ でおきかえることができるから，求めるポテンシャルエネルギーは，定数因数を別にして，2重積分

$$\frac{1}{2}\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy \tag{97}$$

で表わされる．

まず**膜の平衡問題**を考えよう．膜のたわみ $u(x,y)$ が領域 G の境界 Γ で指定された値 $\bar{u}=\bar{u}(s)$ をとるものと仮定する（s は Γ の孤長である）．そうして，どのような外力も働かないとするならば，平衡の位置は次の変分問題によって決定される：平衡位置を表わすたわみ $u(x,y)$ は，閉領域 G で連続であって指定された境界値 $\bar{u}(s)$ をとり，G の内部で1階導関数が連続，2階導関数が区分的連続なすべての関数の中で積分 $\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$ を最小にするものである[44]．オイラーの微分方程式は

$$\Delta u = u_{xx}+u_{yy}=0$$

となる．従って，平衡の問題はこの**偏微分方程式（ポテンシャル方程式）**の**境界値問題**，すなわち微分方程式と指定された境界条件からなる問題と同等である．

次に，仮定をやや一般化して，膜の内点には面密度 $f(x,y)$ の外力が働くと，膜の境界も可動であるが，そこでは境界線に沿って線密度 $p(s)$ の外力が働くと，さらに境界は密度 $\sigma(s)$ の弾性率をもつ弾性力によって静止の位置に引きつけられていると仮定する．そのときには膜のたわみ $u(x,y)$ のポテンシャルエネルギーは，式

44 ［原註］後の議論で重要なことであるが，実は2階導関数についての連続性の仮定を緩めても問題の解に変化は起こらない．

$$\iint_G \left[\frac{\mu}{2}(u_x^2 + u_y^2) + fu\right] dx\,dy + \int_\Gamma \left[p(s)u + \frac{1}{2}\sigma(s)u^2\right] ds$$

で与えられる．平衡状態を得るには，この積分を最小にする関数 $u(x,y)$ を求めればよい．ただし比較対象となる引数関数に対して境界条件は全く不要で，前述の連続性の条件だけを課せばよい．オイラーの微分方程式（内部での平衡条件）は，$\mu = 1$ とするとき，

$$\Delta u = f(x,y)$$

となり，さらに自然境界条件として

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u + p(s) = 0$$

が導かれる．この 2 つの条件式を合わせて課することにより，ここでも偏微分方程式の境界値問題に到達するのである．

ちなみに，この一般の場合において特に $p = 0$ とおき，σ を限りなく大きくすれば，再び微分方程式 $\Delta u = f$，境界条件 $u = 0$ の場合が導かれる．

$\sigma = 0$ のときにはこの平衡問題は一般に解をもち得ない．領域において上下に全く自由に動き得る膜が，任意の外力のもとでは安定な平衡状態になり得ないこと，そうした平衡状態のためには前もって外力の釣り合いを仮定しておくべきであることは，物理的に納得できることである．実際，この結果は変分原理からも直ちに得られる．すなわち，我われのエネルギーの式が $\sigma = 0$ の場合に下限をもつためには，式

(98) $$\iint_G f\,dx\,dy + \int_\Gamma p\,ds = 0$$

の成り立つことが必要である．それはエネルギーの式の中の引数関数 u に定数値 c を入れてみればわかる．そのときにはエネルギーの式は方程式 (98) の左辺の c 倍となるため，左辺が 0 でなければ c の選び方によってエネルギーに，絶対値がいくらでも大きい負の値をとらせることができるからである．しかしこの条件 (98) を課すと，変分問題あるいは平衡問題の解は一意には定まらない．なぜなら解に任意の定数を付加してもエネルギーの式の値も，従ってその最小値も変えないですむからである．それゆえ解を一意にするためには，さらに条件をつけ加える必要がある．それには，膜の重心が静止の位置に固定していることを表わす

$$\iint_G u\,dx\,dy = 0$$

という条件を用いるのが普通である．

膜の運動方程式を得るには，運動エネルギーの表式

(99)
$$T = \frac{\varrho}{2}\iint_G u_t^2\,dx\,dy$$

をもとにして，ハミルトンの原理を適用する．この原理は，たとえば，膜面には面密度 $f(x, y, t)$ の外力が，膜の境界には線密度 $p(s, t)$ の境界力が働いており，さらに弾性力 $\sigma(s)$ で引きつけられている場合には，表式

$$\int_{t_0}^{t_1}\iint_G \left[\frac{\varrho}{2}u_t^2 - \frac{\mu}{2}(u_x^2 + u_y^2) - f(x, y, t)u\right] dx\,dy\,dt - \frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma \sigma u^2\,ds\,dt + \int_{t_0}^{t_1} pu\,dt$$

を停留にせよ，と求めるのである．この問題のオイラーの微分方程式は

$$\mu\Delta u - \varrho u_{tt} - f(x, y, t) = 0$$

と書かれ，自然境界条件は

(100)
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u + p(s) = 0$$

となる．

境界で張られた膜，すなわち，境界上での位置が孤長の関数として指定された（そのように張られた）膜の場合には，条件 (100) の代わりにその境界値の指定が境界条件として用いられる．

ここで，平衡の問題と運動の問題のそれぞれに対する変分法のかかわり方を再考しておこう．平衡の問題では，実例で示したように最小原理を用いると直ちに微分方程式の境界値問題に型通りに帰着する．後の章でも裏付けられることであるが，平衡に関しては変分法が問題の核心に適合しているのである．一方，運動の問題に対するハミルトンの原理の第1の有効性は，運動方程式の形式的かつ簡明な導出にある．ところが，その微分方程式を解くにおいて，あらかじめ指定された，あるいは自然境界条件として現れる境界条件だけでなく，時間変数に関する条件を考慮せねばならない．ハミルトンの

変分原理では t_0 と t_1 という 2 つの時刻で引数関数の値が実運動のそれと一致することが求められるからである．数理物理学に現れる運動の問題の多くにおいては，このような時間的条件があらかじめ課せられることはない．むしろ一般には，境界条件に加えて，**初期状態**が指定されるのである．すなわち，関数 $u(x,y,t)$ と $u_t(x,y,t)$ に対し，それらの $t=0$ における値が指定されるのである．こうして，運動問題に関しては，我われは初期値問題と境界値問題が混合したタイプの問題と取り組まねばならないのである．

板の問題に戻る．ここでも事情は全く同様である．

板とは静止の状態では平面状の弾性体であって，変形したときのポテンシャルエネルギーが，変形によって現れた板面の主曲率のある 2 次形式の積分によって与えられるもののことである．変形した板面の主曲率半径を ρ_1, ρ_2 とすると，ポテンシャルエネルギーは $A\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}\right)+\frac{2B}{\rho_1\rho_2}$ という形の式で表わされる．ここで A と B は物質定数である．$u, u_x, \ldots$ などが微小量であると仮定しているので，次のようにおくことができる：

$$\frac{2}{\varrho_1}+\frac{2}{\varrho_2}=\Delta u=u_{xx}+u_{yy},\qquad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2.$$

従って求める変形のポテンシャルエネルギーは，物質定数の因数を別にすれば

$$(101)\qquad U_1=\iint_G\left[(\Delta u)^2-2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)\right]dxdy$$

の形となる（上の式では物質定数の因子を 1 とおいた）．

上のほかに，外力に基づくポテンシャルエネルギーが加わる．すなわち，外からの面に働く力，境界に働く力，さらに，状況によっては境界における曲げモーメントによって

$$U_2=\iint_G fu\,dx\,dy+\int_\Gamma p(s)u\,ds+\int_\Gamma m(s)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

が加わる．ここで $f(x,y)$, $p(s)$, $m(s)$ はそれぞれ面力，境界力，境界曲線の法線方向に働く曲げモーメントの密度を表わす．

平衡状態はここでもまた次の極小条件で定まる．すなわち U_1+U_2 を，4 階導関数まで連続な引数関数 $u(x,y)$ に対して最小にするのである．(引数関数の微分可能性に関するこの条件は，問題の解に影響を与えることなしにもっと弱めることができる.）この最小問題に対するオイラーの方程式および自然

境界条件[45]を求めるには，§4.5 にならって変分 $\delta U = \delta U_1 + \delta U_2$ を計算して 0 とおけばよい．まず

$$\delta U_1 = \iint_G (\Delta\Delta u \delta u)\,dx\,dy - \int_\Gamma M\delta\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \int_\Gamma P\delta u\,ds,$$

ただし

$$M(u) = -\mu\Delta u - (1-\mu)(u_{xx}x_n^2 + 2u_{xy}x_n y_n + u_{yy}y_n^2),$$
$$P(u) = \frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\mu)\frac{\partial}{\partial s}\big(u_{xx}x_n x_s + u_{xy}(x_n y_s + x_s y_n) + u_{yy}y_n y_s\big)$$

である．（ここで x_n, y_n，および x_s, y_s はそれぞれ外向き法線ベクトルと接線ベクトルの方向余弦である．）$\delta U = 0$ から平衡条件としてまずオイラーの微分方程式

$$\Delta\Delta u + f = 0$$

が導かれる．他方，境界では何も条件が課せられていなかったから，自然境界条件

$$P(u) + p = 0, \quad M(u) + m = 0$$

が得られる．

板が境界で留められている場合，すなわち境界で u と $\frac{\partial u}{\partial n}$ の値が共に 0 に指定されているときには，上記の自然境界条件の代わりに $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ という条件が採用される．また板が支えられている場合，すなわち境界は固定されてはいるが境界での接平面の向きは自由にしてあるときには，境界条件は

$$(102)\qquad u = 0, \quad \mu\Delta u - (1-\mu)(x_n^2 u_{xx} + y_n^2 u_{yy} + 2x_n y_n u_{xy}) = 0$$

となる[46]．

板の運動の微分方程式（振動板の微分方程式）を導くには，運動エネルギーに対する (99) の表式を用いて，やはりハミルトンの原理を適用する．その結果，

---

45 ［訳註］実は，板の場合は膜の場合よりも境界の滑らかさの条件を強めねばならない．

46 ［原註］板の変分問題に際して注意すべき点は，$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$ という表式が，発散形式であるためオイラーの微分方程式には全く影響をもたないけれども，自然境界条件の形にとっては決定的であるということである．

$$\mu\Delta\Delta u + \varrho u_{tt} = 0,$$

あるいは一般的には

$$\mu\Delta\Delta u + \varrho u_{tt} + f(x, y, t) = 0$$

といった運動方程式が得られる．これに加えて，平衡の問題のときと同様にそれぞれの場合の境界条件をつけ加える．現実に起こる現象を決定するためには，これらに加えて，初期条件として初期状態を表わす関数 $u(x, y, 0)$, $u_t(x, y, 0)$ を定めておかなくてはならない．

4.11　第 4 章への補足と問題

4.11.1　与えられた微分方程式を停留条件にもつ変分問題

2 階の常微分方程式 $y'' = f(x, y, y')$ が与えられたとき，式 $F(x, y, y')$ を然るべくとり，その停留条件 $[F]_y = 0$ を y'' について解いた式が，もとの微分方程式と一致させることができる．これについては Bolza, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung, pp. 37–39 を参照．

4.11.2　等周問題における相反性

条件 $K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx =$ 定数のもとで $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ を停留ならしめる解曲線は，特異な場合 (§4.7.1) を除けば，$J =$ 定数のもとで K を停留ならしめる解曲線と同じものである．

4.11.3　円形の光線

xy-平面上において，光の速さが y に比例するならば，光線の経路は x 軸上の点を中心とする円になる．

4.11.4　ディドの問題

与えられた長さの曲線で最大面積の土地を囲い込めというディド (Dido) の問題は，肥沃度を考慮すると次のように一般化される．すなわち，肥沃度が $\rho(x,y)$ で与えられている土地を長さ一定の曲線を使って有利に囲み取る方法を考えよ．これは，積分 $\iint_G \rho(x,y)\,dxdy$ を最大にする問題である．極値関数に対する微分方程式を立てよ．

4.11.5　空間での問題の例

球は等量の体積を包み込んでいる曲面のうちで自身の表面積が最小の曲面である．(Blaschke, W.: Kreis und Kugel, Leipzig 1916 の文献を見よ)．

与えられた境界線をもつ空間曲面の族を考え，その1つを固定する．その固定面との間に囲む面積が一定であり，自身の面積が最小であるものを族の中から求める問題を考えると，極値曲面として平均曲率一定の曲面が得られる．体積についての付帯条件を解除すれば，すでに§4.3.4 で導いた**極小曲面**の微分方程式

$$(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy} = 0$$

が得られる．これは平均曲率が0であることを示す．

4.11.6　曲面上の等周問題

この問題は測地的曲率が一定の曲線を解にもつ．(Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Bd. I, pp. 154–155, Berlin 1930 参照)．

4.11.7　インディカトリクスとその応用

積分 $\int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{F}(x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt$ の極値問題（$\mathfrak{F}$ は $\dot{x}$, $\dot{y}$ について次数1で正同次）において，x, y を固定して ξ, η 平面上の曲線

$$\mathfrak{F}(x, y, \xi, \eta) = 1$$

を考察する．これは**較正曲線**または**インディカトリクス**と呼ばれる[47]．これを用いて多くの重要な関係が幾何学的に解釈される．空間的な問題について対応するのは，方程式 $\mathfrak{F}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 1$ で与えられる $\xi\eta\zeta$-空間の較正曲面である．

さて，もし $\mathfrak{F}_{\dot{x}}\delta x + \mathfrak{F}_{\dot{y}}\delta y = 0$ であるならば，方向 $(\delta x, \delta y)$ は $(\dot{x}, \dot{y})$ に横断的である．ところが，点 $\left(\frac{\dot{x}}{\mathfrak{F}}, \frac{\dot{y}}{\mathfrak{F}}\right)$ における較正曲線の接線の方程式は

$$\left(\xi - \frac{\dot{x}}{\mathfrak{F}}\right)\mathfrak{F}_{\dot{x}} + \left(\eta - \frac{\dot{y}}{\mathfrak{F}}\right)\mathfrak{F}_{\dot{y}} = 0$$

すなわち

$$\xi\mathfrak{F}_{\dot{x}} + \eta\mathfrak{F}_{\dot{y}} = 1$$

である．従って横断方向は，原点から点 $(\dot{x}, \dot{y})$ に向かって引いた半直線が較正曲線と交わる点における，較正曲線の接線の方向である．たとえば，横断性が直交性と同じ意味をもつのはどんな問題のときかと考えると，較正曲線が原点を通る直線と直交することになり，従って，較正曲線は原点を中心とする円でなければならない．同次性から，$\mathfrak{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \varphi(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ である．また，極値方向と横断性方向とが対称的な関係にあるとすれば，較正曲線上の点 P における接線に平行に原点 O から引いた直線が，較正曲線と交わる点における接線は OP に平行でなければならない．

較正曲線の考察が特に役に立つのは**折れた極値曲線**を扱うとき，すなわち極値問題の解が点 (x_0, y_0) で角をもつときの扱いにおいてである[48]．いま，点 (x_1, y_1) から出発して点 (x_0, y_0) に至り，点 (x_0, y_0) には方向 $(\dot{x}_0^-, \dot{y}_0^-)$ で入り，方向 $(\dot{x}_0^+, \dot{y}_0^+)$ に出て行く，そうして点 (x_2, y_2) に終わる曲線が，どのようなときに極値を与えるかという問題を考えよう．曲線が連続的に変化する接線をもっている部分では，通常のようにオイラーの方程式が満たされなければならない．

---

47 ［原註］Carathéodory, C.: Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen, Math. Ann. Bd. 62, pp. 449–503, 1906 を参照.

48 ［訳註］原著では以下における添字に誤りがみつかったので，修正した.

折れ点での状況を調べるために，極値曲線 $(x(t), y(t))$ を，曲線族

$$x(t) + \varepsilon\xi(t), \quad y(t) + \varepsilon\eta(t)$$

のメンバーであると考えよう．ただし，ξ, η は連続的に微分可能で，端点で 0 となる関数である．上の族の中で第 1 変分をつくる．すなわち，積分（汎関数）に代入した結果を ε で微分して $\varepsilon = 0$ とおく．その後の変形を 2 つの孤に分けて行なえば，折れ点に対する境界項のみが残る．外側の端点に対する境界項は，端点が固定されているゆえに，また，滑らかな弧での積分はオイラーの方程式により消えるからである．従って

$$\begin{aligned} &\xi(t_0)\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_0, y_0, \dot{x}_0^-, \dot{y}_0^-) + \eta(t_0)\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_0, y_0, \dot{x}_0^-, \dot{y}_0^-) \\ &- \xi(t_0)\mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_0, y_0, \dot{x}_0^+, \dot{y}_0^+) - \eta(t_0)\mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_0, y_0, \dot{x}_0^+, \dot{y}_0^+) = 0. \end{aligned}$$

$\xi(t_0)$, $\eta(t_0)$ が任意だから次の**ワイエルシュトラス–エルドマン** (Erdmann) **の角点条件**が成り立つ：

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_0, y_0, \dot{x}_0^-, \dot{y}_0^-) &= \mathfrak{F}_{\dot{x}}(x_0, y_0, \dot{x}_0^+, \dot{x}_0^+), \\ \mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_0, y_0, \dot{x}_0^-, \dot{y}_0^-) &= \mathfrak{F}_{\dot{y}}(x_0, y_0, \dot{x}_0^+, \dot{y}_0^+). \end{aligned}$$

すなわち，2 つのベクトル $(\dot{x}_0^-, \dot{y}_0^-)$, $(\dot{x}_0^+, \dot{y}_0^+)$ と較正曲線との 2 つの交点における較正曲線への接線は一致する．曲線の折点における 2 つの方向は，較正曲線の 2 重接線の 2 接点のそれぞれを原点とを結ぶ方向に一定する．

4.11.8　変化する領域に対する変分

積分 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')\,dx$ において，関数 $u(x)$ だけでなく積分限界 x_0 および x_1 がパラメータ ε とともに変化するときには，積分の第 1 変分には，通常の項のほかに領域の変化に起因する追加項が現れる．すなわち，

$$\text{(103)} \qquad \delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ [F]_u \delta u + (F_{u'}\delta u)' \right\} dx + (F\delta x)_{x_0}^{x_1}$$

となる．ここに

$$\delta u = \varepsilon \left(\frac{\partial u(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta x_1 = \varepsilon \left(\frac{\partial x_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta x_0 = \varepsilon \left(\frac{\partial x_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$$

であり，また $[F]_u$ は F のオイラー微分である．

積分領域 G がパラメータ ε とともに変化するならば，2 次元についても（もちろんさらに高次元でも）類似の公式が成り立つ．積分

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

の変分を求めるために，パラメータ ε に依存する領域を G^*，その流通座標を x^*, y^* とし，かつ，それらが 1 対 1 で連続微分可能な変換

$$\begin{cases} x^* = X(x, y; \varepsilon) \\ y^* = Y(x, y; \varepsilon) \end{cases} \tag{104}$$

によって G の流通座標 x, y に結ばれている（G が G^* に写される）と考えよう．ただし $\varepsilon = 0$ は恒等変換になるものとする．さて，G^* の点 x^*, y^* に新しい関数の値 $u^* = u^*(x^*, y^*; \varepsilon)$ を対応させる．そうして，それを前の変換で表わせば

$$u^* = U(x, y; \varepsilon) \tag{104a}$$

となるものとする．すなわち

$$u^* = U(X, Y; \varepsilon) \equiv U(x, y; \varepsilon)$$

である．

曲面族 $u^*(x^*, y^*; \varepsilon)$――そのおのおのは方程式 (104), (104a) により ε を一定にしたとき x, y をパラメータとしてパラメータ表示されていると考えられる――の中に含まれ，$\varepsilon = 0$ に対応するのが我われのもとの関数 $u(x, y)$ であるとみなそう．

いま極値にするべき積分

$$J(\varepsilon) = \iint_{G*} F\bigl[x^*, y^*, u^*(x^*, y^*; \varepsilon), u^*_{x^*}(x^*, y^*; \varepsilon), u^*_{y^*}(x^*, y^*; \varepsilon)\bigr]\, dx^* dy^*$$

を考察するのに，x, y を独立変数として導入すれば，固定領域 G 上の積分

$$J(\varepsilon) = \iint_G F\bigl[X, Y, u^*(X, Y; \varepsilon), u^*_{x^*}(X, Y; \varepsilon), u^*_{y^*}(X, Y; \varepsilon)\bigr] \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy$$

に変換される．ここで，ε で微分して，$\varepsilon = 0$ とおいて変分を求めよう．表現

を簡単にするために次の記号を導入する：

$$\delta x = \varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \qquad \delta y = \varepsilon\left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},$$

$$\delta u = \varepsilon\left(\frac{\partial U(x,y;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \varepsilon\left(\frac{\partial u^*(X,Y;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

$$\delta u_x = \varepsilon\left(\frac{\partial u^*_{x^*}(x,y;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \qquad \delta u_y = \varepsilon\left(\frac{\partial u^*_{y^*}(X,Y;\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

そのとき

$$\delta J = \iint_G \left[F_x\delta x + F_y\delta y + F_u\delta u + F_{u_x}\delta u_x + F_{u_y}\delta u_y + F(\delta x)_x + F(\delta y)_y\right] dx\,dy$$

が得られる．

この積分は次のように変形できる．すなわち，上の変分の代わりに，固定点 u^* に対する変分

$$\bar{\delta} u = \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} u^*(x,y;\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0}$$

を用いるのである．ここで独立変数 (x^*, y^*) の代わりに (x, y) と書いている．この固定的な引数をもつ変分 $\bar{\delta} u$ は，ε に依存する変数 δu と

(105)
$$\delta u = \bar{\delta} u + u_x\delta x + u_y\delta y$$

によって結ばれている．これに対応して

$$\delta u_x = (\bar{\delta} u)_x + u_{xx}\delta x + u_{xy}\delta y,$$
$$\delta u_y = (\bar{\delta} u)_y + u_{yx}\delta x + u_{yy}\delta y$$

が成り立つ．これらを δJ に代入して次式が得られる：

$$\delta J = \iint_G \left\{[F]_u\bar{\delta} u + (F_{u_x}\bar{\delta} u)_x + (F_{u_y}\bar{\delta} u)_y + (F\delta x)_x + (F\delta y)_y\right\} dx\,dy,$$

あるいは

$$\delta J = \iint_G [F]_u\bar{\delta} u\, dxdy + \int_\Gamma \left(F_{u_x}\frac{\partial x}{\partial n} + F_{u_y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\bar{\delta} u\, ds + \int_\Gamma F\left(\delta x\frac{\partial x}{\partial n} + \delta y\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds.$$

ここで n は外向き法線，s は G の境界 Γ に沿う長さである．（この最後の公式は直観的な方法で直接導くこともできる．それには，J の変分を固定領域から出る部分と，領域の変化に起因する部分とに分ける．領域の変化は，境界点の ε に比例する変位法線ベクトル n に沿う成分で表わされる.）

4.11.9 不変な変分問題についてのネーターの定理・質点力学の積分

連続パラメータ α に依存する変換の族[49]

$$\begin{cases} x^* = X^*(x, y, u; \alpha), \\ y^* = Y^*(x, y, u; \alpha), \\ u^* = U^*(x, y, u; \alpha) \end{cases} \tag{106}$$

が与えられている．このとき，任意の曲面 $u = u(x, y)$ は，上の変換により α に依存する曲面 $u^*(x^*, y^*; \alpha)$ の族を生成する．その媒介変数表示（x, y をパラメータとする）を

$$\begin{aligned} x^* &= X^*(x, y, u(x, y); \alpha) = X(x, y; \alpha), \\ y^* &= Y^*(x, y, u(x, y); \alpha) = Y(x, y; \alpha), \\ u^* &= U^*(x, y, u(x, y); \alpha) = U(x, y; \alpha) \end{aligned}$$

と書く．なお，パラメータ α の値が 0 のときの変換 (106) は恒等変換であるとする．

さて，積分

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

が変換 (106) によって不変であると，すなわち，任意の領域 G に対して

$$J^* = \iint_{G^*} F(x^*, y^*, u^*, u^*_{x^*}, u^*_{y^*})\, dx^* dy^* = \iint_G F\, dx\, dy$$

49 ［原註］Noether, E.: Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys. Kl.) pp. 235–257, 1918.

が成り立つと仮定する．ここで G^* は，x, y が領域 G を動くときに点 x^*, y^* が動く領域である．明らかに

$$\delta J = \alpha\left(\frac{\partial J^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$$

である．よって，前節の結果から

$$(107)\qquad \begin{cases} 0 = \displaystyle\iint_G \Big\{[F]_u\bar{\delta}u + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\bar{\delta}u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\bar{\delta}u) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\frac{\partial}{\partial x}(F\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F\delta y)\Big\}\,dx\,dy. \end{cases}$$

上では，前と全く同様に

$$(108)\qquad \begin{cases} \delta x = \alpha\left(\dfrac{\partial X^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \alpha\left(\dfrac{\partial X}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}, \\ \delta y = \alpha\left(\dfrac{\partial Y^*}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \alpha\left(\dfrac{\partial Y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \end{cases}$$

とおいた．また (105) に注意して次式が得られる：

$$(109)\qquad \bar{\delta}u = \alpha\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - (U_x + U_u u_x)_{\alpha=0}\,\delta x - (U_y + U_u u_y)_{\alpha=0}\,\delta y.$$

仮定により方程式 (107) が任意の領域 G に対して成り立つから，右辺の被積分関数は 0 にならねばならない．すなわち

$$[F]_u\bar{\delta}u + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\bar{\delta}u + F\delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\bar{\delta}u + F\delta y) = 0.$$

未知関数の個数がさらに多い場合でも，同様な公式が成り立つ．たとえば積分 $J = \iint_G F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y)\,dx\,dy$ が連続なパラメータ α に依存する変換

$$x^* = X(x, y, u, v; \alpha), \quad y^* = Y(x, y, u, v; \alpha),$$
$$u^* = U(x, y, u, v; \alpha), \quad v^* = V(x, y, u, v; \alpha)$$

によって不変ならば，

$$[F]_u\bar{\delta}u + [F]_v\bar{\delta}v + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\bar{\delta}u + F_{v_x}\bar{\delta}v + F\delta x)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\bar{\delta}u + F_{v_y}\bar{\delta}v + F\delta y) = 0$$

が成り立つ．ただし今度は

$$
(109\text{a}) \qquad \begin{cases} \bar{\delta} u = \alpha\left(\dfrac{\partial U}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - (U_x + U_u u_x + U_v v_x)_{\alpha=0}\,\delta x \\ \qquad\qquad\qquad - (U_y + U_u u_y + U_v v_y)_{\alpha=0}\,\delta y, \\ \bar{\delta} v = \alpha\left(\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - (V_x + V_u u_x + V_v x_x)_{\alpha=0}\,\delta x \\ \qquad\qquad\qquad - (V_y + V_u u_y + V_v v_y)_{\alpha=0}\,\delta y \end{cases}
$$

である．

独立変数の個数や未知関数の個数が，1 つであろうと 2 つ以上であろうと，上の議論の拡張は容易である．1 変数の場合には，積分することにより，極値関数に対して第 1 積分

$$F_{u'}\delta u + F_{v'}\delta v + F\delta x = \alpha \cdot \text{定数}$$

が得られる．ただし δu, δv, δx は (108), (109a) によって x の関数として与えられる．

以上のことを $\int_{x_0}^{x_1} F(u, u')\,dx =$ 最小，という問題を例として確かめよう．被積分関数は x を明示的に含まないから，連続変換

$$x^* = x + \alpha, \quad u^* = u$$

によって不変である．それゆえ極値関数に対して，積分 $F - u'F_{u'} =$ 定数，が得られる．この結果は，すでに §4.4 で導かれたのであるが．

積分 J を不変にする，複数個のパラメータを含む変換の族を知ることができれば，線形独立な発散形のオイラーの式の結合が同じ個数だけ導かれ，それらから同数の線形独立な第 1 積分が得られる．

これらの事実は，**質点力学の積分**によって明らかに例示される．実際，自由質点系に属する質点の軌道は，変分問題

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt = 0$$

の曲線によって与えられる．ここで，$T = \frac{1}{2}\sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ であり，ポテンシャルエネルギー U は質点の相対位置のみに依存する．すなわち，系全体の位置の移動には関係しないとする．

これらの積分は，たとえば

$$t^*=t,\quad x^*=x+\alpha,\quad y^*=y,\quad z^*=z$$

$$（従って\quad \delta t=\delta y=\delta z=0,\quad \delta x=\alpha）$$

で与えられる連続変換，あるいは

$$t^*=t,\quad x^*=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad y^*=-x\sin\alpha+y\cos\alpha,\quad z^*=z$$

$$（従って\quad \delta t=\delta z=0,\quad \delta x=\alpha y,\quad \delta y=-\alpha x）$$

で与えられる連続変換によって不変である．上に述べた結果によって，これらの不変性から，

$$T_{\dot{x}}=\sum m\dot{x}=定数,$$

$$yT_{\dot{x}}-xT_{\dot{y}}=\sum m(y\dot{x}-x\dot{y})=定数$$

が得られる．これは，x, y, z を入れ換えて得られる積分と合わせて，**重心定理**（運動量保存）あるいは**面積定理**（角運動量保存）を与えるものである．

さらに，T と U とが時間を陽に含まない場合には，積分 $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ が変換 $t'=t+\alpha$, $\delta t=\alpha$ のもとで不変であることに注意すれば，**エネルギー積分**が得られる．

詳しくは，Bessel-Hagen, E.: Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik, Math. Ann. Bd. 84, pp. 258–276, 1921 を見よ．

積分 J が，独立変数の任意の関数 p とその k 階までの導関数を含むような変換

$$x^*=X\left(x,y,u,v,p(x,y),\frac{\partial}{\partial x}p(x,y),\ldots,\frac{\partial^k}{\partial y^k}p(x,y)\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

に対して不変ならば，オイラーの式およびその k 階までの全微分の線形結合で恒等的に 0 となるものが得られる．すなわち，オイラーの方程式は互いに独立ではない．

この最も簡単な例は，1 重積分の同次形式

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\mathfrak{F}(x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt$$

である．この積分は，t，$x(t)$，$y(t)$，$\dot{x}(t)$，$\dot{y}(t)$ を $t(\tau)$，$x(t(\tau))$，$y(t(\tau))$，$\frac{dx(t(\tau))}{d\tau}$，$\frac{dy(t(\tau))}{d\tau}$ でおきかえても変わらない．それゆえに，オイラーの式 $[\mathfrak{F}]_x$，$[\mathfrak{F}]_y$ は

$$\dot{x}[\mathfrak{F}]_x + \dot{y}[\mathfrak{F}]_y = 0$$

によって結ばれているのである．(p. 211 の式 (31) を見よ.)

この問題の一層詳細な研究，力学，電気力学，相対論における一般化と応用などについては，前の E. ネーター (Noether) の論文およびそこの文献を見よ．

4.11.10　多重積分での横断性

積分

$$\iint_G F(x,y,x,x_u,y_u,z_u,x_v,y_v,z_v)\,du\,dv$$

を，許容曲面 $[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]$ の境界が，与えられた曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ の上にあるという条件のもとで極小にする問題に対して，曲線の場合に用いた方法を形式的に当てはめると，境界条件

$$\begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix} = 0$$

が得られる．しかしこの条件の必要性はこれまで証明されていない．(Bolza, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung, p. 670 を見よ.)

4.11.11　曲面におけるオイラーの微分式

$p=p(\xi,\eta)$, $q=q(\xi,\eta)$, $r=r(\xi,\eta)$ を pqr-空間内の与えられた曲面のパラメータ表示，$ds^2 = e\,d\xi^2 + 2f\,d\xi d\eta + g\,d\eta^2$ をその曲面上の線要素とする．このとき 2 次形式

$$Q[u,u] = \frac{gu_\xi^2 - 2fu_\xi u_\eta + eu_\eta^2}{eg-f^2}$$

はパラメータのとり方には無関係である．面積分

$$\iint_G Q[u,u]\sqrt{eg-f^2}\,d\xi\,d\eta$$

に対するオイラーの微分式は

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{gu_\xi - fu_\eta}{\sqrt{eg-f^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{-fu_\xi + eu_\eta}{\sqrt{eg-f^2}}\right]$$

であり，さらに

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{eg-f^2}}$$

はパラメータのとり方に依存しない．

4.11.12　静電気学におけるトムソンの原理

あるコンデンサーにおける，すなわち空間の 2 枚の閉曲面 Γ_1, Γ_2 の間の領域 G における電場の強さの成分を u, v, w で表わす．静電場に沸き出しがないという条件

$$u_x + v_y + w_z = 0 \tag{110}$$

が満たされており，かつ両方の境界成分 Γ_1, Γ_2 上に，それぞれ電荷 Q および $-Q$ が与えられているとする．

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_{\Gamma_1} (ux_n + vy_n + wz_n)do = Q, \\ \displaystyle\iint_{\Gamma_2} (ux_n + vy_n + wz_n)do = -Q. \end{cases} \tag{111}$$

（記号については p. 268 を見よ）．

そのとき，場のエネルギー（物質定数を除く）

$$\frac{1}{2}\iint_G (u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz$$

が可能な限り最小になることで静電平衡が実現される．ラグランジュの乗数法に従えば，$\lambda(x,y,z)$ および μ_1, μ_2 を (110) と (111) に掛ける乗数として，オイラーの方程式

(112) $$u = \lambda_x, \quad v = \lambda_y, \quad w = \lambda_z$$

が導かれ，さらに自然境界条件としては

(113) $$\begin{cases} \lambda = \mu_1 = \text{定数}\ (\Gamma_1\ \text{で}) \\ \lambda = \mu_2 = \text{定数}\ (\Gamma_2\ \text{で}) \end{cases}$$

が得られる．すなわち，場のベクトル u, v, w は，各境界成分上で定数であり，内部でポテンシャル方程式 $\Delta\lambda = 0$ を満たすポテンシャル λ の勾配ベクトルに等しい[50]．

4.11.13　弾性体における平衡問題——カスティリャノの原理

3 次元の弾性体に対する平衡条件を定式化して述べるために，古典的な弾性理論におけるいくつかの定義と基礎事実を，物理的な意味の詳細に立ち入ることなしにまとめておこう．

考えている物体は，静止状態では xyz-空間において区分的に滑らかな境界によって限られた領域 G を占めているとする．この静止の位置から，物体はある力を各点で受けて，新たな平衡位置に移り，その際に各点 (x, y, z) は成分が u, v, w で表わされる変位を行なったとしよう．

このとき，物体内に生じたひずみを表わす量を次の定義式により導入する：

(114) $$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_x, & \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}(u_y + v_x), & \varepsilon_{13} = \dfrac{1}{2}(u_z + w_x), \\ \varepsilon_{21} = \dfrac{1}{2}(v_x + u_y), & \varepsilon_{22} = v_y, & \varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2}(v_z + w_y), \\ \varepsilon_{31} = \dfrac{1}{2}(w_x + u_z), & \varepsilon_{32} = \dfrac{1}{2}(w_y + v_z), & \varepsilon_{33} = w_z. \end{cases}$$

さらにそれにともなう膨張を

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

とおく．一方，この変形によって生じた弾性力は，「応力成分」

---

50 ［訳註］このあと原文には「未定乗数法を使わなくても，付帯条件を (u, v, w) があるベクトルの回転で表わし得るということでおきかえることによって，同じ結果に到達する.」の文があったが，これは $Q = 0$ のときのみに正しいので割愛した．

$$\begin{matrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{matrix}$$

の系（9成分）で表わされる．これは位置の関数であって，対称性の条件 $S_{12} = S_{21}$, $S_{23} = S_{32}$, $S_{31} = S_{13}$ を満たしている．

応力とひずみは，次のフック (Hooke) の法則によって結ばれている：

$$(115)\qquad \begin{cases} S_{11} = a\varepsilon_{11} + b\varepsilon, & S_{12} = a\varepsilon_{12}, & S_{13} = a\varepsilon_{13}, \\ S_{21} = a\varepsilon_{21}, & S_{22} = a\varepsilon_{22} + b\varepsilon, & S_{23} = a\varepsilon_{23}, \\ S_{31} = a\varepsilon_{31}, & S_{32} = a\varepsilon_{32}, & S_{33} = a\varepsilon_{33} + b\varepsilon. \end{cases}$$

ここで a と b は物質定数である．

物体内の各点 (x, y, z) に密度成分が P_1, P_2, P_3 であるような体積力 $\mathbf{P}$ が働くとする．さらに物体表面 $\varGamma$ 上の各点には面密度成分が p_1, p_2, p_3 であるような面積力 $\mathbf{p}$ が働くとする．

このとき，平衡条件は次の方程式で与えられる．すなわち，物体内部では

$$(116)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial S_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{21}}{\partial y} + \dfrac{\partial S_{31}}{\partial z} + P_1 = 0, \\ \dfrac{\partial S_{12}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial S_{32}}{\partial z} + P_2 = 0, \\ \dfrac{\partial S_{13}}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{23}}{\partial y} + \dfrac{\partial S_{33}}{\partial z} + P_3 = 0, \end{cases}$$

また，物体表面 $\varGamma$ 上では

$$(117)\qquad \begin{cases} S_{11}x_n + S_{21}y_n + S_{31}z_n - p_1 = 0, \\ S_{12}x_n + S_{22}y_n + S_{32}z_n - p_2 = 0, \\ S_{13}x_n + S_{23}y_n + S_{33}z_n - p_3 = 0. \end{cases}$$

さて問題は，内部 G では体積力 P_1, P_2, P_3 が，表面 $\varGamma_1$ では面積力 p_1, p_2, p_3 が，そうして，残りの表面 $\varGamma_2$ の上では[51]変位

51　［原註］表面の条件としては，このほかに，法線変位と接面力，あるいは接面変位と法線力を，それぞれに与えることもできる．また，当然のことながら $\varGamma_1$ または $\varGamma_2$ が全表面と一致することもあり得る．

(118) $$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}$$

が与えられたとして，応力（の分布）とひずみ（の分布）を決定することである．

平衡状態はまたポテンシャルエネルギー

$$\text{I}: \quad U[u,v,w] \equiv \frac{1}{2}\iiint_G \left[\varepsilon_{11}S_{11} + 2\varepsilon_{12}S_{12} + \varepsilon_{22}S_{22} + 2\varepsilon_{23}S_{23} + \varepsilon_{33}S_{33} + 2\varepsilon_{31}S_{31}\right] dx\,dy\,dz - \iiint_G (P_1u + P_2v + P_3w)\,dx\,dy\,dz - \iint_{\Gamma_1} (p_1u + p_2v + p_3w)\,do$$

を最小にするという原理によって特徴づけられる．その変分問題においては，引数関数としては，Γ_2 の上で与えられた値をとる変位 u, v, w をとるべきである．応力 S は (115) によって変位 ε から，また ε は (114) によってひずみから表わされると考える．

変分計算により，平衡条件が G 内では (116)，Γ_1 上では (117) によって与えられることが容易にわかる．

さて，平衡状態は，ポテンシャルエネルギー最小の原理の代わりに，変形の仕事が最小になるという原理によっても特徴づけることができる．後者はいわゆるカスティリャノ (Castigliano) の原理であるが，それと前者との同値性は，フリードリクス変換の応用によって最も容易に示される．その目的のために，もとの拘束条件 (114) と (118) に乗数を掛け，積分して U に加える．この際，フックの方程式 (115) は，S に対する定義式に過ぎないとみなし手をつけない．そうして，前にとった方式に統一して乗数を決定すれば，次の同値な変分問題に到達する：

$$\text{II}: \quad \frac{1}{2}\iiint_G \left[\varepsilon_{11}S_{11} + 2\varepsilon_{12}S_{12} + \varepsilon_{22}S_{22} + 2\varepsilon_{23}S_{23} + \varepsilon_{33}S_{33} + 2\varepsilon_{31}S_{31}\right] dx\,dy\,dz - \iint_{\Gamma_2} (\bar{p}_1\bar{u} + \bar{p}_2\bar{v} + \bar{p}_3\bar{w})do = \text{最小}.$$

ここで応力 S を，G 内での付帯条件 (116) および Γ_1 上での付帯条件 (117) のもとで変化させる．ひずみ ε は (115) により，また「Γ_2 上の反作用」力 $\bar{p}$

は (117) により，応力によって表わされると考えるべきである．

この問題の変分方程式は，いわゆる「両立性の条件」であるが，具体的に書き下すことは略す．一般論からいえば，この条件は応力との間の関係 (114) と (115) を満たし，Γ_2 上では $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ という値をとる「変位」u, v, w が存在し得るという事実と同値である．

以上の考察の理論的な意義は変分問題の双対性にあるが，力学の視点からはカスティリャノの原理は特別な意味をもっている．というのは，個々の場合によっては，この原理の方がポテンシャルエネルギー最小の原理よりも便利な扱いを可能にすることがあるからである．そのことは，たとえば梁の変形論についても当てはまり，この原理に従うと通常の極小問題に帰着されてしまう．

4.11.14　梁の理論におけるカスティリャノの原理

梁の変形論におけるカスティリャノの原理が，ポテンシャルエネルギーの原理から導かれることを，典型的な例についてたどってみよう．

左端 $x=-l$ で「かみ止め」られ，中点 $x=0$ で支えられ，かつ，右端 $x=l$ で力 P_1，モーメント M_1 の働きを受ける梁を考える．さらにそれは，単位の長さあたり $q(x)$ の荷重を受けているとする．$u(x)$ を鉛直方向の変位とすると，ポテンシャルエネルギーは

$$U=\int_{-l}^{+l}\left[\frac{1}{2}(u'')^2-qu\right]dx-P_1u(l)+M_1u'(l)$$

である．平衡状態が実現するのは，自身および1次導関数が連続で，2次導関数が区分的に連続であり，かつ，条件

(119)　$$u(-l)=0,\quad u'(-l)=0,\quad u(0)=0$$

を満たす任意の関数を引数関数として，上の U が最小になるときである．

解に対する自然方程式を，$M(x)=-u''(x)$（物質定数を除いて，湾曲のモーメントである）を導入して定式化しよう．梁の原点の両側の部分の内点で $M(x)$ は連続な1次および2次導関数をもち，

$$
\begin{cases}
M''(x) - q(x) &= 0 \\
M(-0) - M(+0) &= 0 \\
M(l) - M_1 &= 0 \\
M'(l) - P_1 &= 0
\end{cases}
\tag{120}
$$

を満たす．

上の変分問題に次のような変換をほどこすと，カスティリャノの原理に到達する：1. U の中の $u''(x)$ を $-M(x)$ でおきかえる．2. 方程式 $M(x)+u''(x)=0$ と方程式 (120) を付帯条件とみなし，それぞれの左辺に乗数を掛けて U の左辺に加える．3. u と M とに関する変分をとることによって得られる方程式から，乗数を M で表わし代入する．

こうして得られた式の符号を変えたもの，すなわち「変形の仕事」を表わす積分

$$
\frac{1}{2}\int_{-l}^{+l} M^2(x)\,dx
$$

を，各部分線分の上で 2 回まで連続微分可能な，付帯条件 (119) を満たす関数 $M(x)$ を引数関数として極小にするのである．

付帯条件によって関数 $M(x)$ は積分定数を除いて定まる（その定数は，たとえば支持力あるいは応力のモーメントに関連）．かくして，変分問題はこの定数を決める通常の極小問題に帰着する．

梁に，上とは違った荷重をかけたり保持の仕方をかえたりしたときに，どういう変換を用いればよいかも明らかであろう．明らかに，カスティリャノの原理が有意義なのは，2 つより多い支持条件または応力条件が課せられたときのみ，すなわち「静力学的に不定の場合」のみである．そうでなければ，$M(x)$ はすでに自然条件だけから計算されてしまうからである．

4.11.15　座屈の変分問題

棒がその両端から，長さの方向に力 P で押されるとき，この棒は安定あるいは不安定な平衡状態になる．すなわち，P がある値 P_0 の「座屈力」より小さいか，あるいは大きいかに応じて，棒は押されて横方向に小変形しても

まっすぐな平衡状態に戻る，あるいは，横方向に大きく変形したままとなる「座屈」を起こすのである．第 1 の場合，まっすぐな棒は，小さい変曲に対して，ポテンシャルエネルギーの極小を与えるのに対し，第 2 の場合はそうならない．

棒が静止状態で長さ l をもつとし，$u(x)$ $(0 \leqq x \leqq l)$ で横変形を表わせば，状況のもとでのポテンシャルエネルギーは，物質定数である因数を別として次式で与えられる：

$$U = \int_0^l (u'')^2\,dx - P\int_0^l (u')^2\,dx.$$

第 1 項は湾曲のエネルギー，第 2 項は伸縮のポテンシャルエネルギーである（後者は綱の場合と同様）．

十分小さい P に対しては[52]，境界条件 $u(0) = u(l) = 0$ のもとでの U の最小値は 0 である．十分大きい P に対しては，U は負になり得る．実際，任意の引数関数 u に対して

$$P > \frac{\displaystyle\int_0^l (u'')^2\,dx}{\displaystyle\int_0^l (u')^2\,dx}$$

ならばそうなる．座屈力 P_0 は，U の最小が 0 のままであるような P の最大値であり，明らかに境界条件 $u(0) = u(l) = 0$ のもとでの，2 次形式の比

$$\frac{\displaystyle\int_0^l (u'')^2\,dx}{\displaystyle\int_0^l (u')^2\,dx}$$

の最小値として与えられる．あるいは，同値な言い方をすれば，付帯条件

$$\int_0^l (u')^2\,dx = 1$$

52　［原註］たとえば，$P < \frac{1}{l^2}$ としよう．すると $\int_0^l u'\,dx = 0$ により区間内に $u'(x_0) = 0$ が成り立つような点 x_0 が存在する．従って

$$u'(x) = \int_{x_0}^x u''(x)\,dx, \quad (u')^2 \leqq l\int_0^l (u'')^2\,dx, \quad \int_0^l (u')^2\,dx \leqq l^2\int_0^l (u'')^2\,dx$$

が成り立つ.（このとき $U \geqq 0$ であり，その最小値は 0 である.）

および境界条件 $u(0) = u(l) = 0$ のもとでの

$$\int_0^l (u'')^2\, dx$$

の最小値である．

$P_0 = \lambda$ は，微分方程式

$$u'''' + \lambda u'' = 0$$

の境界条件 $u(0) = u(l) = 0$, $u''(0) = u''(l) = 0$ のもとでの第 1 固有値にほかならない．このような固有値問題およびその変分法による取り扱いについては，下巻で詳しく論じよう．

上巻の索引

■数字・欧字先頭索引

2 次形式, 13
2 次形式の慣性則, 30
h 次反復形式, 13

■和文索引

●あ行

アダマールの不等式, 40
アーベルの積分方程式, 169
一様収束, 58
一様に近似, 70
一様に有界, 63
移動ベクトル, 237
インディカトリクス, 271
ヴォルテラの積分方程式, 168
運動エネルギー, 259
運動量保存, 278
エルミート
　—形式, 14, 17, 30
　—の多項式, 93, 97
　—の直交関数, 163
　単位—形式, 17
エンスコグの方法, 166
オイラー
　—の微分方程式, 198, 218, 264, 268
　—の方程式, 196, 203, 236
　—の方程式の解, 254
　—またはラグランジュの乗数, 234
横断性条件, 225, 226
応力成分, 281
重み $p(x)$, 93

●か行

解核, 149
解形式, 20, 31
回転, 44
回転楕円座標, 244
回転放物座標, 244, 245
ガウス
　—曲率, 208
　—の積分定理, 204
核, 119
角運動量保存, 278
カスティリャノの原理, 281
可積分, 115
可測, 115
関数空間, 61
　—における勾配, 237
関数系
　—が完全, 58
　—の完全性, 55, 117
　—の閉性, 117
関数の近傍, 181
関数方程式, 80, 218
完全
　—直交関数系, 56
　—直交系, 5

完全性
　—関係, 56
　—の等式, 5
　関数系の—, 55, 117
　三角関数の—, 73, 192
幾何級数, 10, 19
奇関数, 87
ギブスの現象, 112
基本領域, 51, 221
逆
　—核, 149
　—行列, 12
　—固有値, 18
　—スペクトル, 18
　—積分方程式, 149
　—双線形形式, 13
級数表示, 21
境界
　—条件, 230
　—値問題, 205, 264
　固定—条件, 223
　自然—条件, 221, 263
　自由—, 221
共焦点 2 次曲面, 243
共役な行列, 11
行列, 7
　—の掛算の公式, 8
　逆—, 12
　随伴—, 12
　対称—, 12
　単位—, 9
　直交—, 12, 17
　転置—, 11
　ユニタリ—, 12, 48
極形式, 14
極座標, 240
極小
　—回転曲面, 182
　—曲面, 205
　　—の微分方程式, 270
　—列, 187, 195
極値
　—関数, 198
　—曲線, 271
　—線方向, 226
極値問題, 179
　—の解が満たすべき必要条件, 198
　—の解の存在, 185
許容関数, 180, 227
近似, 56
偶関数, 87
屈折法則, 177
区分的に
　—滑らか, 51
　—連続, 51
グラムの行列式, 37, 66, 114
結合法則, 9
ケーリー–ハミルトンの定理, 23
ケロッグの方法, 166
懸垂線, 232
　—の問題, 183
交換法則, 9
較正曲線, 271
光線の方向, 227
拘束条件, 47, 249
恒等変換, 10
勾配
　汎関数の—, 238
項別積分, 61
コーシー
　—の主値, 105
　—の定理, 81
固定境界条件, 223
固有関数, 120
固有値, 23, 28, 120, 130, 140
　—の最大–最小性, 140
　—のミニ・マックス性, 35, 41
　逆—, 18
固有ベクトル, 26, 42

●さ行
サイクロイド, 220
最小性, 92

最速降下線, 181
最短路を定める問題, 201
座屈力, 285
座標関数, 188
差分法, 189
作用素, 8
三角関数の完全性, 73, 192
次元数, 67
自然境界条件, 221, 263
自然条件, 249, 251
質点力学の積分, 277
シュヴァルツの不等式, 2, 52, 121, 130, 143, 148
自由境界, 221
重心定理, 278
集積原理, 61, 63
縮退, 29
縮退核, 122
主軸
—ベクトル, 26
—変換, 25
—問題, 25
シュタイナーの問題, 177
シュミットの方法, 165
焦双曲線, 243
焦楕円, 243
初期状態, 267
伸縮, 44
随伴行列, 12
スペクトル, 48
—密度, 106
逆—, 18
正規化
—されたベクトル, 2
—されている, 52
正規直交系, 4, 53
正定値, 131
—の 2 次形式, 14
正同次, 210, 270
積分 2 次形式, 130
積分不能の微分方程式, 235
積分変換, 121, 143
積分方程式
アーベルの—, 169
ヴォルテラの—, 168
逆—, 149
第 1 種の—, 170
第 2 種の—, 119
第 3 種の—, 172
転置—, 123
同次(の)—, 119, 159
非同次の—, 144
摂動, 45
漸化式, 91
漸近次元数, 68, 157
線形
—集合, 67
—従属, 3, 53
—代数, 8
—独立, 3, 53
—独立の尺度, 38
線形変換, 6
対称な—, 13
線要素, 239
双線形形式, 13
逆—, 13
単位—, 13
双線形積分形式, 130
相反性, 177, 269
測地円, 227
測地線, 181
測度, 115
束縛条件, 35

●た行

第 1 種の積分方程式, 170
第 1 変分, 199
第 2 種の線形積分方程式, 119
第 2 変分, 228
第 3 種の積分方程式, 172
退化, 252
—核, 122
—した楕円座標, 244

対称
—核, 129, 158
—行列, 12
—な線形変換, 13
楕円座標, 241
多重, 137
—度, 120
—フーリエ級数, 78
単位
—2 次形式, 16
—エルミート形式, 17
—行列, 9
—双線形形式, 13
単因子, 47
チェビシェフの多項式, 93, 94, 179
超越整関数, 154
超幾何多項式, 93
重複度, 137
跳躍点, 78
直接解法, 186
直交, 2, 52
—関係, 53
—行列, 12, 17
—載線群, 226
—条件, 53
直交化, 54
—の手順, 5
—の方法, 54
直交変換, 16
無限成分の—, 59
強いルジャンドル条件, 229
定値性, 244
ディドの問題, 270
ディニの定理, 61, 138
ディリクレ
—の積分公式, 83
—の不連続因子, 87
—の問題, 191, 195
停留
—関数, 199
—条件, 269
—点, 176
テータ関数, 80
デュ・ボア-レイモンの定理, 213
展開係数, 55
展開定理, 142
テンソル, 8
転置行列, 11
転置同次方程式, 123
導関数, 213
同次
—積分方程式, 159
—方程式, 123
同次性の条件, 209
等周問題, 103, 177, 182, 186, 269
一般の—, 230
同程度連続性, 62
独立尺度, 66
トムソンの原理, 280

●な行

内積, 2, 52
滑らかさ, 65
ネーターの定理, 275
ノイマン
—級数, 11, 20, 150
—展開, 23
ノルム平方, 2, 52

●は行

発散形式, 207
ハミルトンの変分原理, 259, 267
波面の法線, 227
パラメータ, 237
—表示, 224
ハールの定理, 216
汎関数, 179, 249
反射法則, 177
判定条件, 230
反転公式, 85
反復核, 145
ハンメルシュタインの定理, 173
光の伝播, 202, 227
ピカールの定理, 171

引数関数, 179, 230, 232, 250, 284
微小振動, 261
非同次の積分方程式, 144
微分–差分方程式, 218
微分方程式, 92
非ホロノームな条件, 235
標準形, 256
—への変換, 255
フィッシャー–リースの定理, 117
フェイェールの和定理, 108
フェルマー
—の原理, 181
—の最短経路の原理, 177
付加条件, 25
付帯条件, 133, 184, 230, 247, 257, 286
フックの方程式, 283
不定値, 131
負定値, 131
不変な変分問題, 275
フーリエ
—級数, 74, 82, 190
—級数論, 55
—係数, 55
—積分, 82
—多項式, 74
—の積分公式, 83
フリードリックス変換, 250, 254
フルヴィッツの解, 103
フレドホルム
—の公式, 151
—の定理, 123, 126
分配法則, 9
閉曲線, 211, 227
平均
—近似, 55
—収束, 58, 116
平方誤差の—, 56
平衡条件, 260, 282
平方誤差の平均, 56
閉領域, 51
ベクトル, 1
—の長さ, 2
固有—, 26, 42
ベッセルの不等式, 5, 55, 131, 143
変位, 284
変化する領域, 272
変分, 197
—原理, 259
—導関数, 198
第 1—, 199
第 2—, 228
変分法, 175
—における基本補題, 197
—の基本問題, 181
—の直接解法, 194
変分問題, 249
—の直接解法, 187
不変な—, 275
ポアソンの和公式, 81
包合
—形への変換, 246
—的, 249
棒の状態
横振動する—, 262
母関数, 91, 95
ポテンシャルエネルギー, 259
ポテンシャル方程式, 205, 258, 264

●ま行
膜の平衡問題, 264
マーサーの定理, 147
マックス・ミニ問題, 36
密
いたる所で—, 63
密な関数系, 107
ミニ・マックス
—の原理, 35
—問題, 33
固有値の—性, 35, 41
無限個の変数, 190
無限小線形変換, 43
メリン
—の積分変換, 111

—の反転公式, 109
面積定理, 278
面積要素, 60

●や行
ヤコビの多項式, 93, 96
優級数, 20, 145
ユニタリ
—行列, 12, 48
—変換, 17
無限成分の—, 59

●ら行
ライプニッツの公式, 90
ラグランジュ
—の運動方程式, 260
—の乗数, 234
—の乗数法, 248
—の未定乗数法, 176
ラゲール
—の多項式, 93, 99
—の直交関数, 164
ラプラスの積分, 88
リゾルベント, 149
リッツの方法, 187
リーマンのツェータ関数, 111
ルジャンドル
—の仮定, 215
—の条件, 198, 227
—の多項式, 88
—変換, 251, 252, 254, 256
ルベーグ
—の収束定理, 116
—の積分概念, 115
零解, 120
連続スペクトル, 106
連立一次方程式, 6

●わ行
ワイエルシュトラス
——エルドマンの角点条件, 272
—の $\wp$ 関数, 242
—の近似定理, 70, 213
—の集積原理, 62
—の定理, 25

著者
R. クーラント (Richard Courant)
D. ヒルベルト (David Hilbert)

訳者
藤田　宏（ふじた　ひろし）
東京大学理学部名誉教授

高見　穎郎（たかみ　ひでお）
東京大学工学部名誉教授

石村　直之（いしむら　なおゆき）
一橋大学大学院経済学研究科教授

シュプリンガー数学クラシックス　第26巻
数理物理学の方法　上

平成25年1月25日　発　行

著　者　R. クーラント
　　　　D. ヒルベルト

訳　者　藤田　宏
　　　　高見　穎郎
　　　　石村　直之

編　集　シュプリンガー・ジャパン株式会社

発行者　池田和博

発行所　丸善出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話 (03)3512-3261 ／ FAX (03)3512-3272
営業：電話 (03)3512-3256 ／ FAX (03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・製本／シナノ書籍印刷株式会社

ISBN 978-4-621-06525-9 C 3041　　Printed in Japan